

TRANSFERTS THERMIQUES

I- Généralités

II- Conduction

III- Rayonnement

IV- Convection

V. Applications

TRANSFERTS THERMIQUES

I- Généralités

Transfert thermique
=
Énergie en transit dû à une différence de température

Les modes de transfert de chaleur

↪ La conduction

transport d'énergie dans la matière **sans de déplacement de matière**

Transport par les électrons (conducteur) ou les phonons (isolant)

- ➡ nécessite un milieu solide de transmission
- ➡ transmission faible dans les gaz

↪ La convection

transport d'énergie dans la matière avec **déplacement de matière**

Transport par écoulement de fluide (liquides, gaz) / différence de masse volumique

- ➡ nécessite un milieu fluide de transmission

↪ Le rayonnement

transport d'énergie sous forme **d'ondes électromagnétiques**

pas de déplacement de matière

pas de contact entre les objets ou milieux qui échangent l'énergie

- ➡ pas de milieu de transmission nécessaire (**dans le vide, ça marche aussi !**)

TRANSFERTS THERMIQUES

I- Généralités

Flux de chaleur : quantité de chaleur transférée par unité de temps

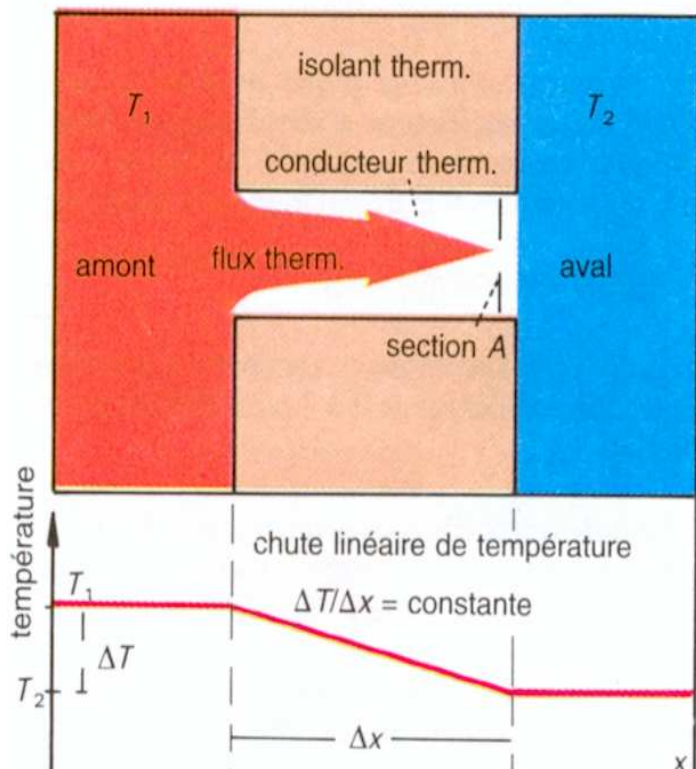
$$\Phi = \frac{dQ}{dt}$$

Un flux de chaleur s'exprime donc en Joules/s, c'est-à-dire en Watt → c'est une puissance.

Densité de flux de chaleur : quantité de chaleur transférée par unité de temps par unité de surface

Une densité de flux de chaleur s'exprime donc W/m²

$$\phi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt}$$



Analogie avec la mécanique des fluides :

Un débit fluide est un flux de matière [m³/s]

Pour obtenir un débit de fluide, il faut force motrice:

une différence de pression ou d'énergie potentielle.

Analogie avec l'électricité :

Un débit de courant est un flux d'électrons [C/s]

Pour obtenir un débit de courant, il faut force motrice:

une différence de potentielle électrique.

Un débit de chaleur est un flux de chaleur [J/s]

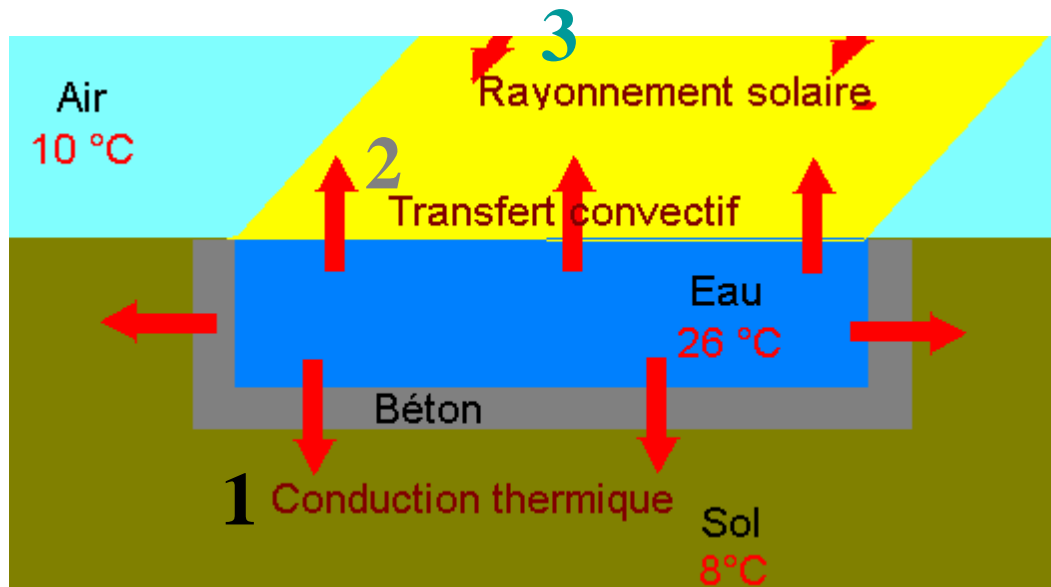
Pour obtenir un débit de chaleur, il faut une force motrice:

une différence de température

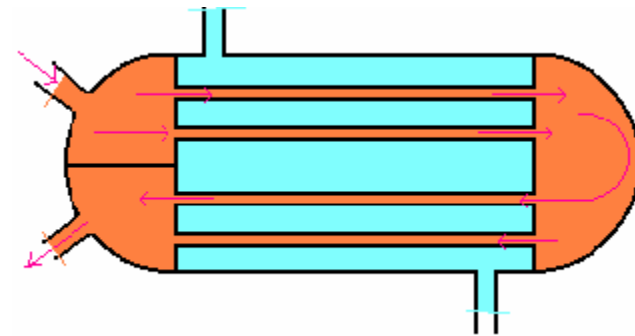
TRANSFERTS THERMIQUES

I- Généralités

Déperdition d'une piscine



Échangeurs de chaleur



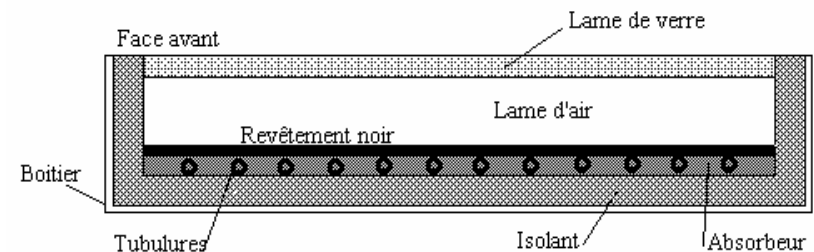
Thermique des bâtiments

Rendement dans les turbines

Équilibre thermique de la Terre

Changements climatiques

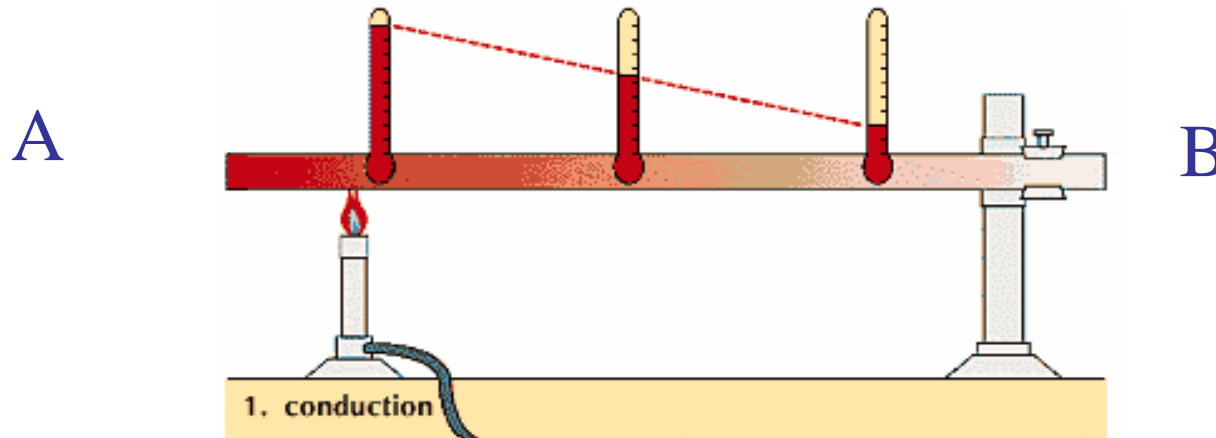
Capteurs solaires (production ECS)



TRANSFERTS THERMIQUES

II- Conduction

II.A.- Loi de Fourier

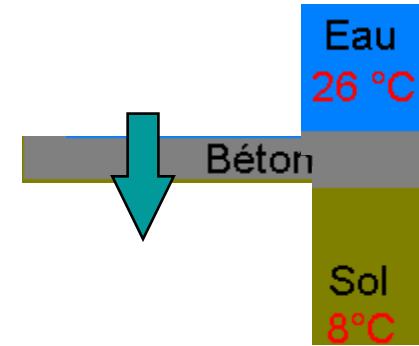
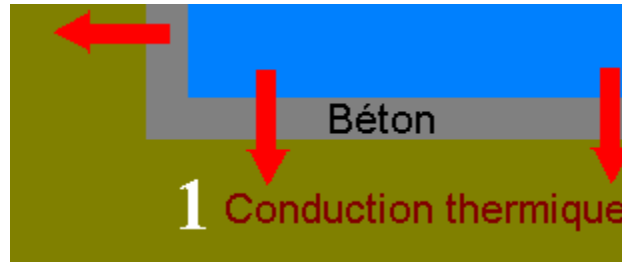


Dans cette barre métallique chauffée en son extrémité A, on observe un gradient longitudinal de température $T(x)$: $T(A) > T(B)$

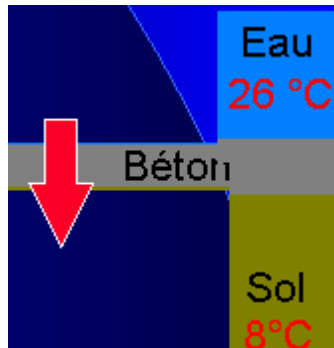
Cette différence du potentiel température $T(A) - T(B)$ provoque un flux de chaleur Φ :

$$\Phi = h S [T(A) - T(B)] \text{ en J/s}$$

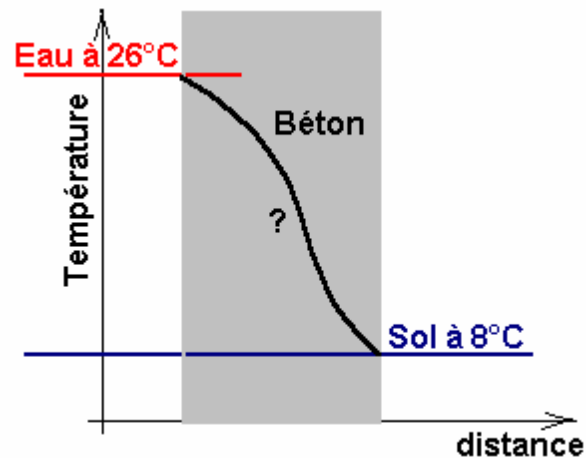
h est défini comme un coefficient de transfert de chaleur



Milieu de propagation du flux de chaleur: un solide
Cause du phénomène: un écart de température



Dans le béton, la température $T(M)$ va varier de 26°C au contact de l'eau, à 8°C au contact du sol.



Il existe donc une fonction de variation de la température

$$T = T(M)$$

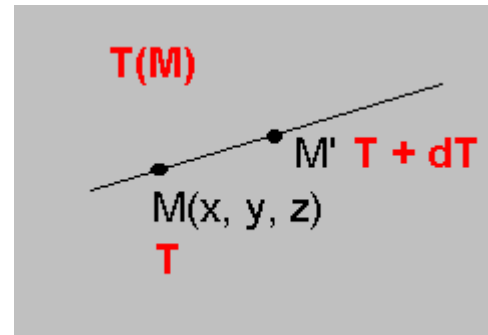
dans le milieu conduisant la chaleur

Puisque la température varie dans le solide en fonction de l'endroit où on la mesure,

c'est dire que:

Lorsqu'on se déplace de: M en $M + dM$

$$T(M + dM) = T(M) + dT$$



T est une fonction des 3 variables d'espace x , y et z :

La variation totale dT est la somme des 3 variations:

$$dT = \frac{\delta T}{\delta x} dx + \frac{\delta T}{\delta y} dy + \frac{\delta T}{\delta z} dz$$

Il existe donc un gradient de température:

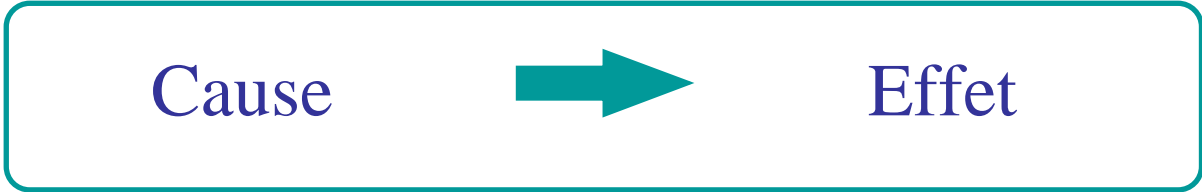
$$\vec{\text{grad}} T \left| \begin{array}{l} \frac{\delta T}{\delta x} \\ \frac{\delta T}{\delta y} \\ \frac{\delta T}{\delta z} \end{array} \right.$$

et la variation totale de température est égale au produit scalaire:

$$dT = \vec{\text{grad}} T \cdot \vec{dM}$$

avec:

$$\vec{dM} \left| \begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array} \right.$$



Un gradient local de température

$\vec{\text{grad T}}$



$\vec{\phi}$

un densité de flux de chaleur locale

La Loi de Fourier exprime que l'effet produit est proportionnel à sa cause

$$\vec{\phi} = -\lambda \vec{\text{grad T}}$$

W/m²
 W/(m . °C)
 °C/m

Nature du corps	Masse volumique	Chaleur massique	Conductivité thermique
Notation	ρ	C	λ
Unité	kg / m ³	J / (kg . K)	W / (m . K)
Argent	10500	230	418
Cuivre	8940	380	389
Aluminium	2700	860	200
Acier	7850	490	46
Béton	2300	960	0,92
Verre	2530	840	1,20
Polystyrène	44		0,025
Laine de verre	200	0,67	0,040

TRANSFERTS THERMIQUES

I- Conduction

II.B.- Champs de lignes isothermes

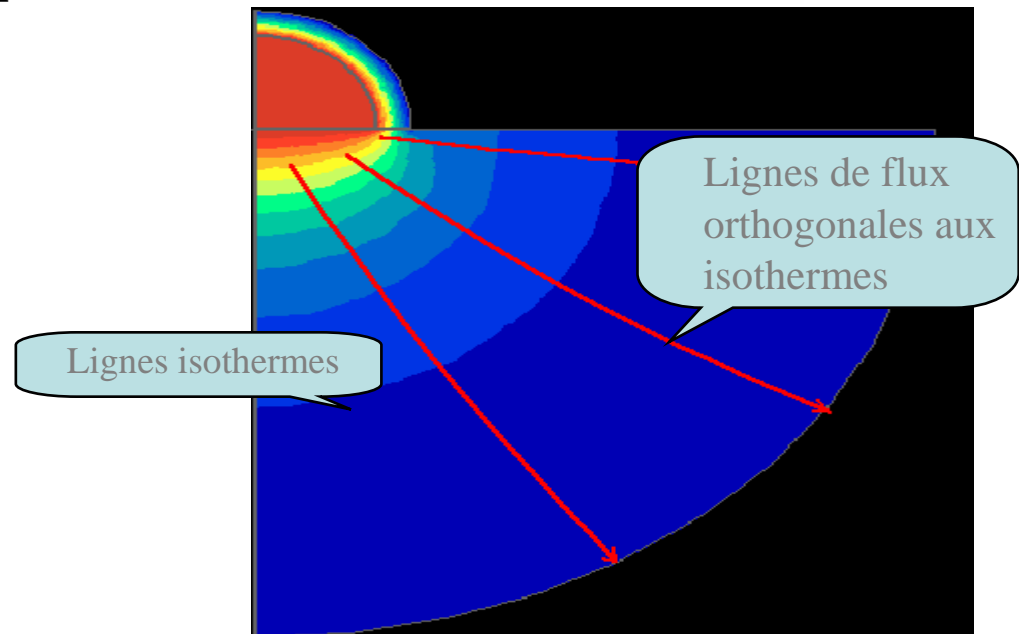
Définition de (C), une ligne isotherme: Si $M \in (C)$ alors $T(M) = Cte$ ou $dT \equiv 0$

La Loi de Fourier: $\vec{\phi} = -\lambda \text{grad } T$ les vecteurs densité de flux et gradient de température sont colinéaires.

Définition du gradient: $dT = \text{grad } T \cdot d\vec{M}$ conduit donc à l'expression du produit scalaire: $\vec{\phi} \cdot d\vec{M} = -\lambda dT$

*Si: $dT = 0$ on a: $\vec{\phi} \cdot d\vec{M} = 0$
quand $M + dM$*

qui signifie que les vecteurs densité de flux sont orthogonaux aux lignes isothermes



TRANSFERTS THERMIQUES

I- Conduction

II.C.- conduction en 1D (problème du mur)

1 D \Rightarrow une seule variable d'espace x

$$x = 0$$

$$x = L$$

Dans le cas général, T dépendra de l'espace: ce sera $T(x, t)$ $T(x = 0) = T_0$

$$T(x = L) = T_L$$

et la Loi de Fourier se réduit à l'équation différentielle

$$\phi = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Cause du phénomène de conduction dans le milieu: une différence de température

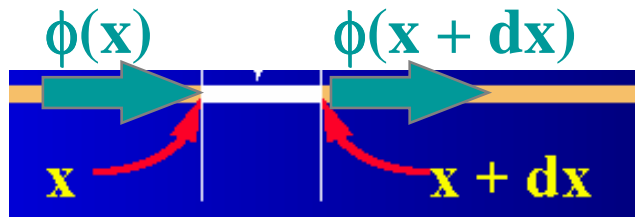
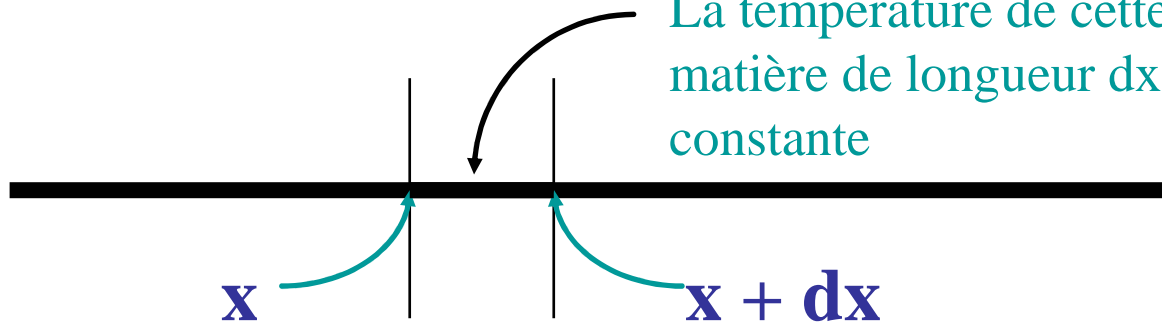


Effet: un Flux de chaleur

Hypothèse stationnaire

Dans cette hypothèse, rien ne dépend de la variable temps t : $T(x,t) \equiv T(x)$

La température de cette tranche de matière de longueur dx demeure constante



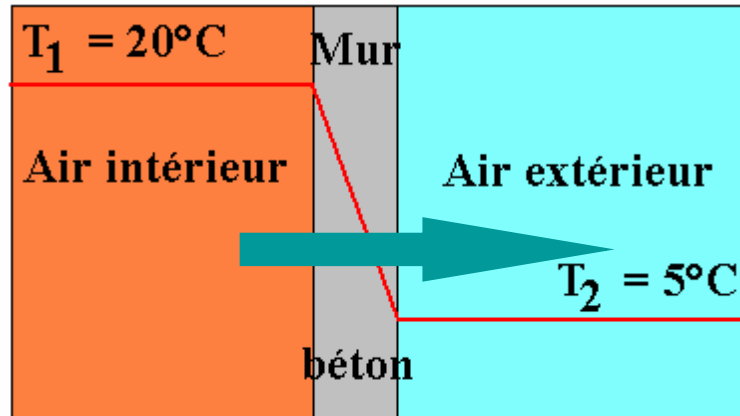
Par conséquent:

$\phi(x) = \phi(x + dx)$ Le flux de chaleur est constant

$$\phi(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Leftrightarrow \phi(x) dx = -\lambda dT \Leftrightarrow \int_{x=0}^{x=L} \phi(x) dx = -\lambda \int_{x=0}^{x=L} T(x) dx \Leftrightarrow \phi \cdot L = -\lambda(T_L - T_0)$$

$$\phi = \lambda \frac{T_0 - T_L}{L}$$

Exemple: mur en béton



L'écart de température $T_1 - T_2$ provoque un flux de chaleur à travers le mur:

$$\phi = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$$

Ecart de température: $T_1 - T_2 = 20^\circ\text{C} - 5^\circ\text{C} = 15^\circ\text{C}$

Epaisseur du mur: $L = 0,20 \text{ m}$

λ pour le béton: $\lambda = 0,92 \text{ W} / (\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$

Flux thermique à travers le mur: $\phi = 0,92 \times 15 / 0,20 = 69 \text{ W/m}^2$

Puissance pour $S = 5 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 20 \text{ m}^2$, $\Phi = \phi S = 1,38 \text{ kW}$

Analogie électrique

$$\phi = \frac{\Phi}{S} = \frac{\lambda}{L}(T_1 - T_2) \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{L}{\lambda S} \Phi = R\Phi$$

ρ est la résistivité électrique

$1/\lambda$ est la résistivité thermique, inverse de la conductivité

$$T_1 - T_2 = R\Phi \quad \text{Différence de potentiel}$$

$$R = \frac{L}{\lambda S} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S} \equiv \frac{\rho L}{S} \quad \text{Résistance thermique}$$

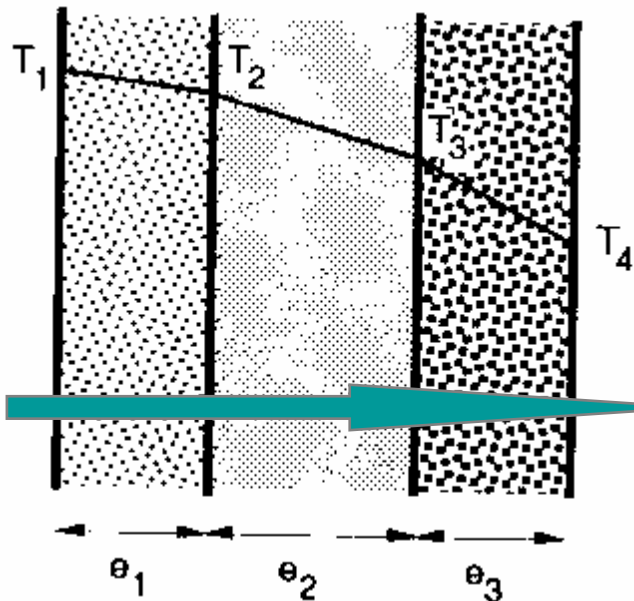
R s'exprime en °C/W

r est la résistance spécifique $r = R.S = \frac{L}{\lambda}$ $\phi = \frac{\Phi}{S} = \frac{\lambda}{L}(T_1 - T_2) \Rightarrow T_1 - T_2 = r\phi$

r s'exprime en °C.m²/W

<i>Equations et Grandeurs en régime permanent</i>	<i>Phénomène thermique</i>	<i>Phénomène électrique</i>
grandeur étudiée	température T	potentiel E
Equation générale	$\Delta T = 0$	$\Delta E = 0$
densité de flux ou de courant	$\varphi = -\lambda \text{ grad } T$	$i = -\gamma \text{ grad } E$
flux ou courant	$\Phi = \varphi S$	$I = i S$
conductivité	λ	γ
résistance	$R_t = L / (\lambda S)$	$R_e = L / (\gamma S)$
loi d'Ohm	$T_2 - T_1 = R_t \Phi$	$E_2 - E_1 = R_e I$

Mur multicouches (1D stationnaire)



Chaque couche est caractérisée par:

son épaisseur e_i

sa conductivité λ_i

les températures T_i et T_{i+1} de ses 2 faces

La densité de Flux thermique est constante tout le mur:

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \dots = \frac{T_n - T_{n+1}}{R_n}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{R_1}{T_1 - T_2} = \dots = \frac{R_n}{T_n - T_{n+1}} = \frac{\sum_i R_i}{T_1 - T_{n+1}}$$

$$\Phi = \frac{\Delta T}{\sum_i R_i} = S \frac{\Delta T}{\sum_i \frac{e_i}{\lambda_i}}$$

Loi du mur simple avec additivité des résistances spécifiques

TRANSFERTS THERMIQUES

I- Conduction

II.D.- équation générale de la chaleur

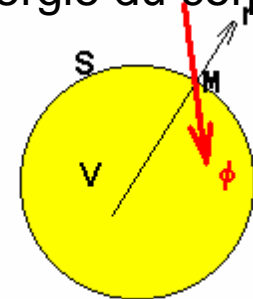
Expression locale de la loi exprimant un lien causal entre un apport d'énergie et une variation de température – application du 1er principe de la thermodynamique

Apport d'énergie implique $\Phi dt = \iiint_V \rho.c.dT.dV$ une variation d'énergie du corps

Les apports peuvent être :

1 - Flux par conduction reçu par un volume V délimité par une surface S

$$\Phi [W] = - \iint_S \vec{\phi} \cdot \vec{n} . dS \quad \text{soit un apport d'énergie} \quad Q_c [J] = - dt . \iint_S \vec{\phi} \cdot \vec{n} . dS$$



2 - Éventuellement, apport thermique de sources de chaleur internes de densité de puissance volumique p [W/m^3]

$$Q_i [J] = dt . \iiint_V p . dv$$

1er principe : $Q_c + Q_i = \Delta U = mc \Delta T$

$$- dt . \iint_S \vec{\phi} \cdot \vec{n} . dS + dt . \iiint_V p . dv = \iiint_V \rho dV . c . dT$$

(Formule d'Ostrogradski) $\rightarrow \iint \vec{\phi} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint \operatorname{div}(\vec{\phi}) \, dv = \iiint \nabla \vec{\phi} \cdot dv$

Bilan thermique $\iiint_V \left[-\nabla \vec{\phi} + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dv = 0 \quad \forall V \quad -\nabla \vec{\phi} + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

Loi de Fourier $\vec{\phi} = -\lambda \vec{\nabla} T$ $\nabla(\lambda \vec{\nabla} T) + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

Milieu homogène isotrope $\nabla(\vec{\nabla} T) + \frac{p}{\lambda} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta T + \frac{p}{\lambda} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

Diffusivité thermique

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad [\text{m}^2\text{s}^{-1}]$$

Le cuivre a une diffusivité thermique $a = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r \cdot)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Régime stationnaire

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0$$

Équation de Poisson

Milieu inerte

$$\Delta T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Équation de Fourier

Régime stationnaire+milieu inerte

$$\Delta T = 0$$

Équation de Laplace

Conditions aux limites

Indispensables pour la résolution de l'équation
2 grands type (Dirichlet, Neumann)

Conditions de Dirichlet :

les CL imposent la température en surface (ou en un point particulier) à chaque instant

$$T_S = T(x_s, y_s, z_s)$$

- assez éloignées de la réalité (imposer une température ?!)
- facilitent les calculs

Conditions de Neumann :

les CL imposent le flux en surface à chaque instant

$$\phi_S = \phi(x_s, y_s, z_s, t)$$

- Plus réaliste (tiens compte des flux par rayonnement par exemple)
- Dans le cas stationnaire, $\phi_S = \phi_0$

TRANSFERTS THERMIQUES

I- Conduction

II.E.- Modèles élémentaires

Mur homogène, régime stationnaire, conductivité constante

$$\Delta T = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = 0$$

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

$$x = 0 \rightarrow T = T_1$$

$$x = \delta \rightarrow T = T_2$$

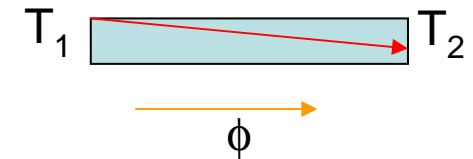
$$C_1 = -\frac{T_1 - T_2}{\delta}$$

$$C_2 = T_1$$

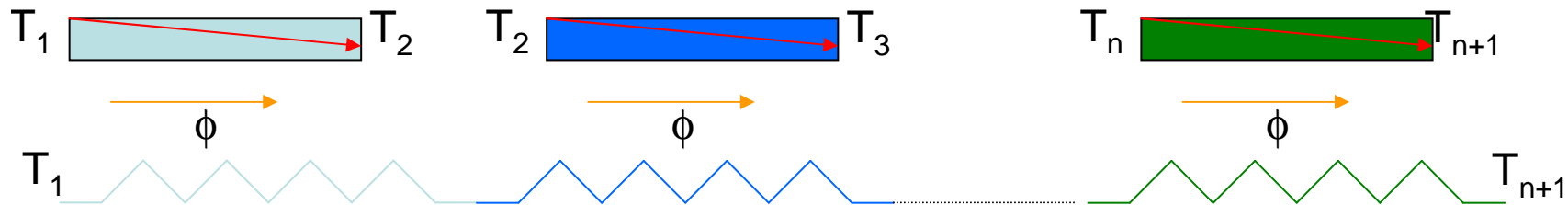
$$T(x) = -\frac{T_1 - T_2}{\delta} x + T_1$$

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda S}{\delta} (T_1 - T_2)$$

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} \quad R = \frac{\delta}{\lambda S}$$



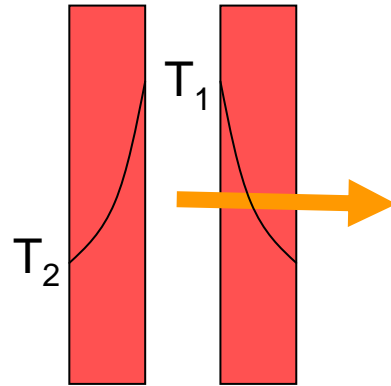
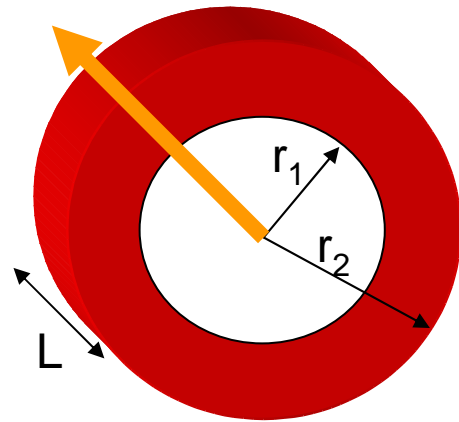
Mur homogène à N couches, régime stationnaire



On applique pour chaque couche le modèle précédent

$$T(x) = -\frac{T_i - T_{i+1}}{\delta_i} x + T_i \quad \Phi = \frac{\lambda_i S}{\delta_i} (T_i - T_{i+1}) \quad \Phi = \frac{T_1 - T_{N+1}}{\sum_{i=1 \dots N} R_i} = \frac{\Delta T}{R_T} \quad R_T = \sum_{i=1 \dots N} \frac{\delta_i}{\lambda_i S}$$

Cylindre creux homogène, régime stationnaire, conductivité constante



$$\Delta T = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r)}{\partial r} = 0$$

$$u = \frac{dT}{dr} \rightarrow \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0$$

$$\ln u + \ln r = \ln C_1$$

$$r = r_1 \rightarrow T = T_1$$

$$r = r_2 \rightarrow T = T_2$$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln r_1 / r_2}$$

$$C_2 = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2}$$

$$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln r / r_1}{\ln r_2 / r_1}$$

$$\Phi = -\lambda S(r) \frac{dT}{dr} = \frac{\lambda S(r) (T_1 - T_2)}{r \ln r_2 / r_1}$$

$$\Phi = \phi S(r) = \frac{1}{R} \Delta T = \Delta T \frac{\lambda}{r \ln r_2 / r_1} 2\pi r L$$

$$R = \frac{\ln r_2 / r_1}{2\pi \cdot L \cdot \lambda}$$

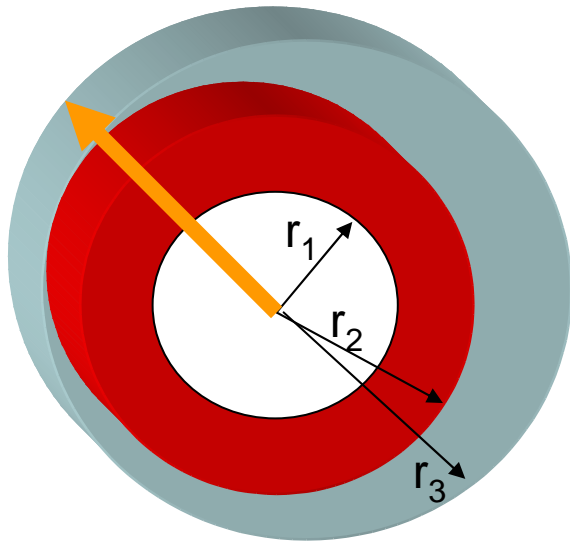
- Φ et R sont indépendants de r

- On utilise souvent une puissance linéaire linéique $\Phi_l = \Phi$ pour 1 m de tuyau ($L = 1$ m)

Cylindre creux homogène à N couches, régime stationnaire, conductivité λ_i constante

Φ est indépendant de r → il se conserve au passage de N couches

On applique pour chaque couche le modèle précédent



$$T(r) = -\frac{(T_i - T_{i+1}) \ln r / \ln r_i}{\ln r_{i+1} / \ln r_i} + T_i$$

$$\Phi = 2\pi L \lambda_i \frac{(T_i - T_{i+1})}{\ln r_{i+1} / r_i}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\ln r_2 / r_1}{2\pi L \lambda_1 (T_1 - T_2)} = \dots = \frac{\ln r_{n+1} / r_n}{2\pi L \lambda_n (T_n - T_{n+1})} = \frac{\sum_{i=1..N} \ln r_{n+1} / r_n / 2\pi L \lambda_i}{T_1 - T_{N+1}}$$

$$\Phi = \frac{1}{R_T} \Delta T \quad R_T = \sum_{i=1..N} \ln r_{n+1} / r_n / 2\pi L \lambda_i$$

Exemple : canalisation calorifugées

Mur homogène, régime stationnaire, conductivité constante, CL Dirichlet + Neumann

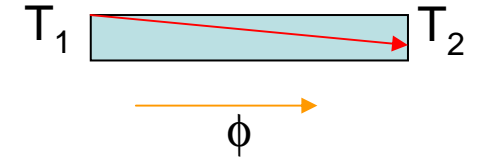
$$T(x) = C_1 x + C_2$$

$$C_2 = T_1$$

$$x = 0 \rightarrow T = T_1$$

$$x = \delta \rightarrow \phi(\delta) = \phi_2$$

$$\phi_2 = -\lambda \left(\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right)_{x=\delta} = -\lambda C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{\phi_2}{\lambda}$$



$$T(x) = -\frac{\phi_2}{\lambda} x + T_1 \Rightarrow T(\delta) = T_2 = -\frac{\phi_2}{\lambda} \delta + T_1 \Rightarrow T_2 - T_1 = -\phi_2 \frac{\delta}{\lambda} = -\phi \frac{\delta}{\lambda}$$

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} \quad R = \frac{\delta}{\lambda S}$$

Cylindre plein, régime stationnaire, conductivité λ constante

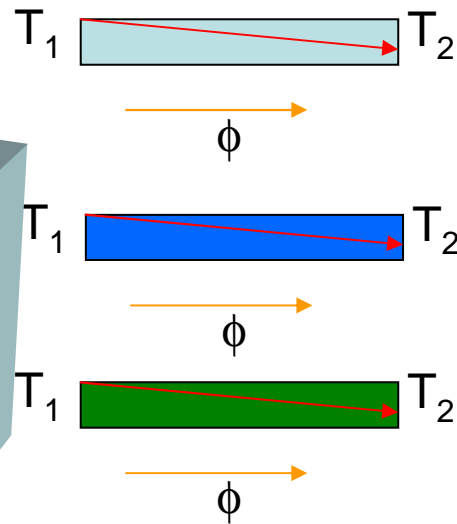
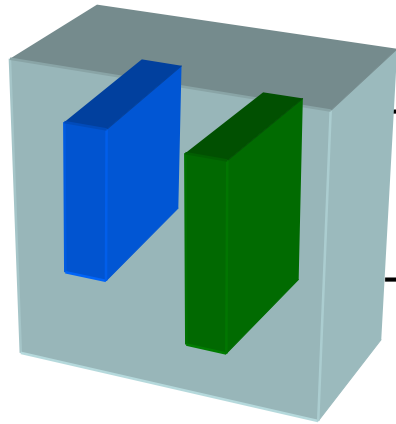
Idem cylindre creux avec $r_1 \rightarrow 0$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$$

Physiquement inacceptable, sauf si $C_1 = 0$

$T(r) = \text{constante}$, donc $\Phi = 0 \text{ W}$

Mur composite, régime stationnaire



Problème a priori 2D, mais l'approximation 1D permet cependant une bonne modélisation de la réalité

$$\Delta T = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = 0$$

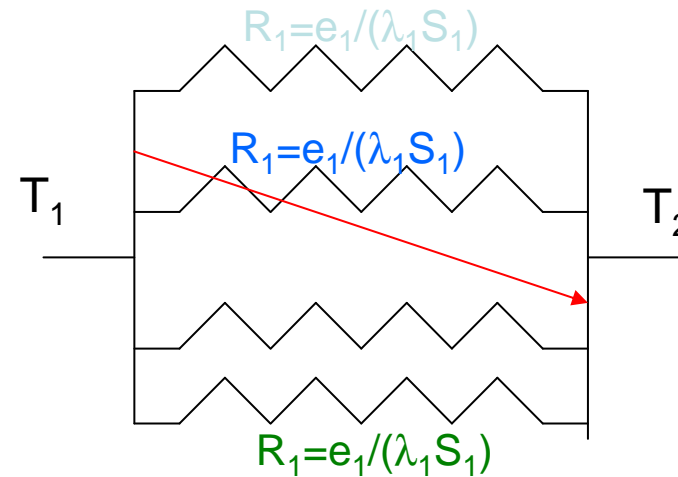
Mur composite de N couches caractérisées par:

son épaisseur e_i

sa conductivité λ_i

sa surface S_i

les températures T_1 et T_2 de ses 2 faces



$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_T} = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1..N} \frac{1}{R_i}} \quad R_i = \frac{e_i}{\lambda_i S_i}$$

TRANSFERTS THERMIQUES

I- Conduction

II.F.- Modèle du milieu semi-infini

T, Φ



Milieu semi infini = milieu dont les dimensions sont suffisamment grandes pour que les perturbations (T ou Φ) appliquées sur l'une des faces ne se fassent pas ressentir sur l'autre

Description réaliste du sol

Résolution de l'équation de la chaleur



Transformée de Laplace d'une fonction

Méthode de séparation des variables

Théorème de superposition (décomposition de Fourier)

Fonction de Green

Calcul numérique

Transformée de Laplace

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt$$

f continue bornée sur $[0, +\infty[$ (même par morceaux)

$\exists \alpha \ 0 < \alpha < 1 / t^\alpha |f(t)| \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$

Si f est définie sur \mathbb{R} , f est nulle sur \mathbb{R}^-

$F(p)$ définie pour $p > 0$ (majoration à l' ∞)

Si p complexe \rightarrow c'est la transformée de Fourier

Linéarité : $L[af(t)+bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)]$

Dérivée : $L[f'(t)] = pF(p) - f(0^+)$

Similitude : $L[f(kt)] = (1/k)F(p/k)$

Dérivation : $F^{(n)}(p) = L[(-1)^n t^n f(t)]$

\rightarrow voir cours mathématiques

$f(t)$	$F(p)$
1 (Heaviside)	$1/p$
t	$1/p^2$
$1/t$	non définie
t	$1/p^2$
$\partial^n T(x,t) / \partial x^n$	$d^n F(p) / dx^n$
$(1/p) \exp(-qx) \ q^2 = p/a$	$1 - \operatorname{erf}[x/(4at)^{1/2}]$

les tables de transformées de Laplace permettent un passage relativement aisé $f(t) \rightarrow F(p)$
l'inverse n'est pas toujours très simple !

Exemple : équation de la chaleur unidimensionnelle sans source (soit $\Pi(x,p) = \mathcal{L}[T(x,t)]$)

Équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0$$

Transformée de Laplace

$$\frac{d^2 \Pi(x,p)}{dx^2} - \frac{1}{a} [p\Pi(x,p) - T(x,0^+)] = 0$$

$$\frac{d^2 \Pi(x,p)}{dx^2} - \frac{p}{a} \Pi(x,p) = \frac{T_0}{a}$$

Eq. Diff. Conventionnelle à résoudre, puis inversion $F(p) \rightarrow f(t)$ pour la solution finale

Changement de variable

$$T^*(x,t) = T(x,t) - T_0 \Rightarrow \Pi^*(x,p) = \Pi(x,p) - T_0/p$$

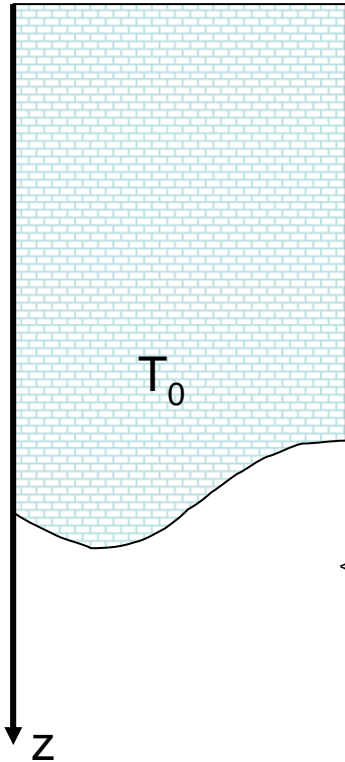
$$\frac{1}{a} [p\Pi(x,p) - T_0] = \frac{p}{a} \left[\Pi(x,p) - \frac{T_0}{p} \right] = \frac{p}{a} \Pi^*(x,p)$$

$$\frac{d^2 \Pi^*(x,p)}{dx^2} - \frac{p}{a} \Pi^*(x,p) = 0 \Rightarrow \Pi^*(x,p) = A \exp(-kx) + B \exp(+kx) \quad k^2 = \frac{p}{a}$$

Conditions initiales \rightarrow détermination des constantes d'intégration A et B

Application : mur semi-infini à température T_0 , λ constant, soumis à un saut de température T_1

T_1 appliquée « brusquement »



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = 0 \\ T(z,0) = T_0 \\ T(0,t) = T_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T^*(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T^*(z,t)}{\partial t} = 0 \\ T^*(z,0) = 0 \\ T^*(0,t) = T_1 - T_0 \end{cases}$$

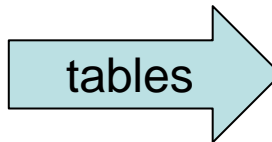
$$\begin{cases} \frac{d^2 \Pi^*(z,p)}{dz^2} - \frac{p}{a} \Pi^*(z,p) = 0 \\ \Pi^*(z,0) = 0 \\ \Pi^*(0,p) = \frac{T_1 - T_0}{p} \end{cases}$$

$$\Pi^*(x,p) = A \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}}z\right) + B \exp\left(+\sqrt{\frac{p}{a}}z\right)$$

Π^* ne peut pas $\rightarrow \infty$ (majoration) : **B=0**

$$x=0 \Rightarrow \Pi^*(x,p) = \frac{T_1 - T_0}{p} = A \exp(0) = A$$

$$\Pi^*(x,p) = \frac{T_1 - T_0}{p} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}}z\right)$$



$$F(p) = \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{p} \rightarrow f(t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right)$$

$$T^*(x,t) = (T_1 - T_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{4at}}z\right) \Rightarrow T(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{4at}}z\right)$$

Fonction erreur erf(u) et fonction erreur complémentaire erfc(u)

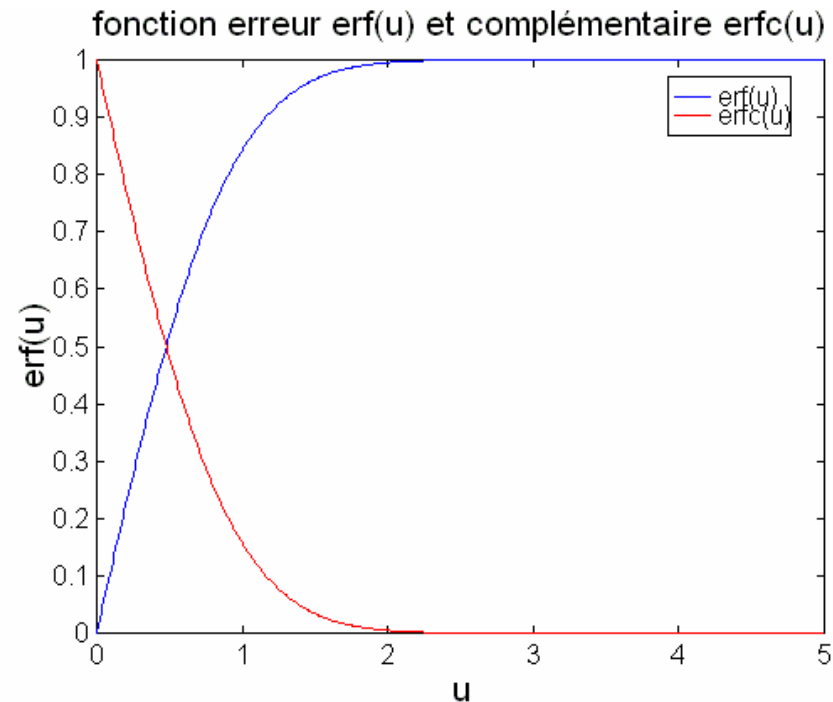
$$\mathbf{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \mathbf{exp}(-\xi^2) d\xi$$

Fonction tabulée (pas de solution analytique)

$$\mathbf{erfc}(u) = 1 - \mathbf{erf}(u)$$

$$\mathbf{erf}(0) = 0 \quad \mathbf{erf}(\infty) = 1 \quad \mathbf{erf}(-u) = -\mathbf{erf}(u) \quad \frac{d}{du} \mathbf{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathbf{exp}(-u^2)$$

$$\mathbf{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\beta} \int_0^u \mathbf{exp}\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) d\alpha \quad \frac{d}{du} \mathbf{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot \beta} \mathbf{exp}\left(-\frac{u^2}{\beta^2}\right)$$



$$T^*(x,t) = (T_1 - T_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{4at}} z\right) \Rightarrow T(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{4at}} z\right) = T_1 - (T_1 - T_0) \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{4at}} z\right)$$

On peut donc également calculer la densité de flux qui traverse le plan (la surface) $z=0$

$$\begin{aligned} \Phi &= -\lambda S \left. \frac{dT(z,t)}{dz} \right]_{z=0} = \frac{2\lambda S(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi} \sqrt{4at}} \left. \exp\left(-\frac{1}{4at} z^2\right) \right]_{z=0} \\ &= \frac{\lambda S(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi} \sqrt{at}} = \frac{\lambda S(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c} t}} = \frac{\sqrt{\lambda \rho c} S(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi} t} = b S \frac{(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi} t} \end{aligned}$$

$$b = (\lambda \rho c)^{\frac{1}{2}}$$

Effusivité thermique du matériau. Le flux pénétrant dans le matériau est proportionnel à son effusivité !

Mise en contact de deux milieux semi-infinis

Milieu 1, température initiale T_1 , effusivité b_1
Milieu 2, température initiale T_2 , effusivité b_2

Si $T_1 > T_2$
 $\varphi_1 = b_1 (\pi t)^{-1/2} (T - T_1) < 0$ et $\varphi_2 = b_2 (\pi t)^{-1/2} (T - T_2) > 0$
Conservation du flux $\rightarrow \varphi_1 = -\varphi_2$

$$T = \frac{b_1 T_1 + b_2 T_2}{b_1 + b_2}$$

Si $b_1 \approx b_2$ alors $T \approx (T_1 + T_2)/2$
Si $b_1 \gg b_2$ alors $T \approx T_1$

Explication de la sensation physiologique des températures (cf. TD)

Méthode de séparation des variables

On cherche s'il existe une solution particulière à variables séparées satisfaisant le système d'équation (chaleur + CL) : $T(\mathbf{x},t)=X(\mathbf{x}).Y(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = 0 \\ T(x, y, z, 0) = CL_1 \\ T(x_0, y_0, z_0, t) = CL_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Y(t) \cdot \frac{\partial^2 X(z)}{\partial z^2} - \frac{X(z)}{a} \frac{\partial Y(t)}{\partial t} = 0 \\ T(x, 0) = CL_1 \\ T(x_0, t) = CL_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{X''(z)}{X(z)} = \frac{1}{a} \frac{Y'(t)}{Y(t)} \\ T(x, 0) = CL_1 \\ T(x_0, t) = CL_2 \end{array} \right.$$

$$\frac{X''(z)}{X(z)} = \alpha = -k^2$$

$$\frac{1}{a} \frac{Y'(t)}{Y(t)} = \alpha = -k^2$$

$$Y(t) = \delta \exp(-ak^2 t)$$

$$a \frac{X''(z)}{X(z)} = \beta = i\omega$$

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \beta = i\omega$$

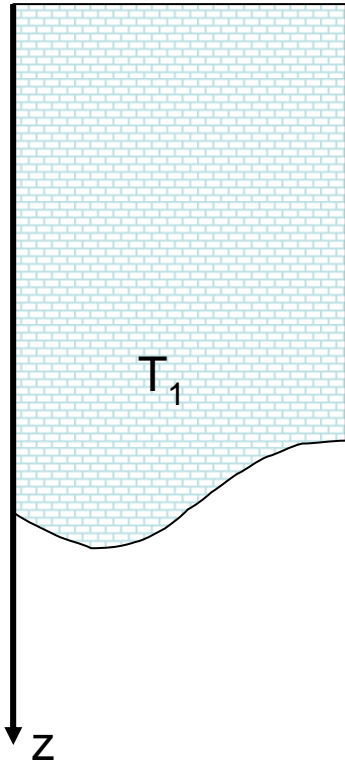
$$Y(t) = \eta \exp(i\omega t)$$

$\alpha > 0$ car sinon $T \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow \infty$
Modèle adaptée pour les phénomènes qui tendent vers une distribution de la température constante à l'équilibre

Modèle adaptée pour les phénomènes périodiques en fonction du temps

La solution élémentaire = $X(z).Y(t) + C_i \rightarrow$ les conditions aux limites sont essentielles

Application : mur semi-infini à température T_0 , λ constant, soumis à une variation périodique de sa température en surface (modèle du sol sous rayonnement solaire)



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = 0 \\ T(\infty,0) = T_1 \\ T(0,t) = T_1 + A_0 \cos \omega t \end{cases}$$

θ : fluctuation de température

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} = 0 \\ \theta(\infty,0) = 0 \\ \theta(0,t) = A_0 \cos \omega t \end{cases}$$

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \beta = i\omega \Rightarrow Y(t) = \eta \exp(i\omega t)$$

$$\frac{X''(z)}{X(z)} = \frac{\beta}{a} = \frac{i\omega}{a} = i^2 k^2 \Rightarrow X(z) = \kappa \exp(-ikz) + \mu \exp(+ikz)$$

$$\theta(z,t) = [\kappa \exp(-ikz) + \mu \exp(+ikz)] \times \eta \exp(i\omega t)$$

la solution doit être finie si $x \rightarrow \infty$: $\mu = 0$
 $\theta(0,t) = A_0 \cos \omega t$: $\kappa \eta = A_0$

$$\theta(z,t) = A_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{a}} z\right) \exp(i\omega t)$$

$$\text{or } \beta = i\omega = \frac{\omega}{2}(1+2i-1) = \frac{\omega}{2}(1+i)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{i\omega}{a}} = \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}(1+i)$$

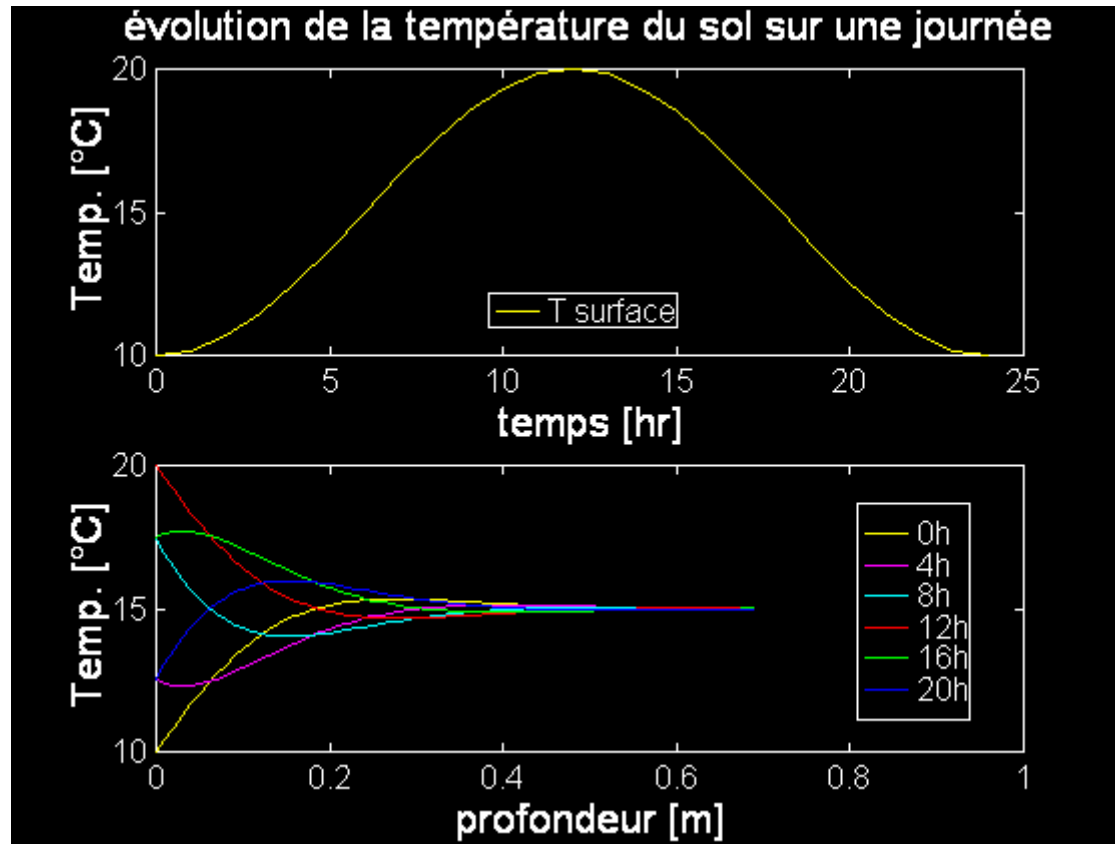
$$\theta(z,t) = A_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{a}}z\right) \exp(i\omega t) \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \theta(z,t) &= A_0 \exp\left[-\left(\frac{\omega}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}(1+i)z\right] \exp(i\omega t) \\ &= A_0 \exp\left[-\left(\frac{\omega}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}z\right] \exp\left(i\left[\omega t - \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}z\right]\right) \\ &= A_0 \cos\left[\omega t - \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}z\right] \exp\left[-\left(\frac{\omega}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}z\right] \\ &= A_0 \cos\left[\omega t - \left(\frac{\omega}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}z\right] \exp\left(-\frac{z}{D}\right) \end{aligned}$$

L'amplitudes oscillations décroît rapidement
si on s'éloigne du plan $z=0$
pour des fréquences croissantes
Il existe un déphasage temporel des oscillations
entre deux profondeurs

D : profondeur d'amortissement (à cette profondeur la variation cyclique de T est atténuée par le facteur $1/e = 37\%$ (86% à $2D$, 98% à $4D$) $\rightarrow T$ est à peu près constante ($=T_1$) pour $z=4D$.

$$D = \left(\frac{2a}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$



$$a = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

$$D = 0,12 \text{ m} \quad (4D = 0,48)$$

$$w = (2\pi)/(24 \cdot 3600)$$

$$T_0 = 15 \text{ }^\circ\text{C}, \quad A_0 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$$

La diffusivité thermique des sols est dans la gamme $a=0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

Cas de l'ensoleillement journalier : période du signal 24h $\rightarrow D=0,1173 \text{ m}$

Cas de l'ensoleillement annuel : période du signal 365 jr $\rightarrow D=2,2411 \text{ m}$

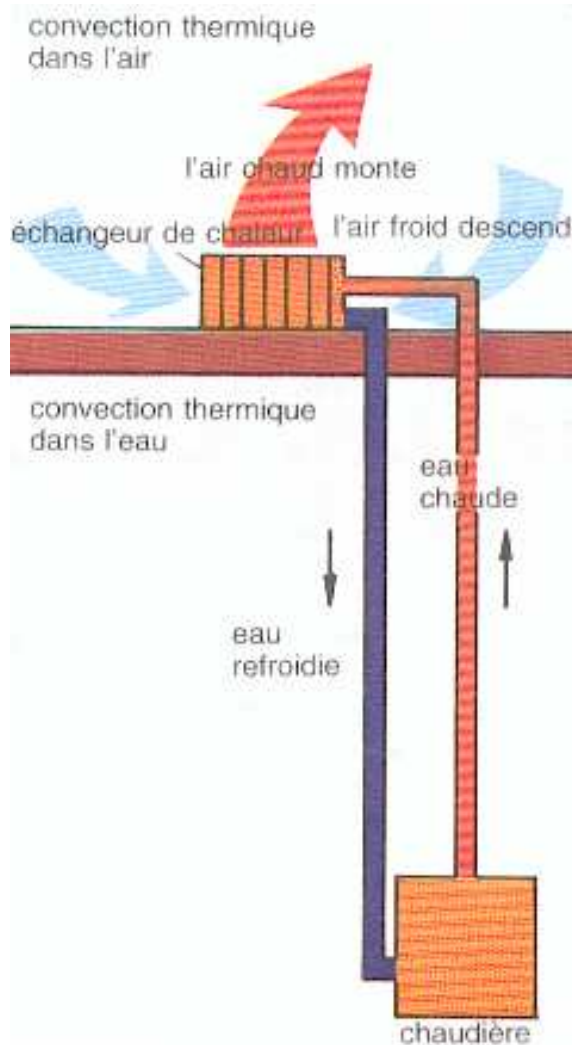
Cas d'une période glaciaire : période du phénomène 1000 ans $\rightarrow D=224,11 \text{ m}$

- ↪ les bonnes caves sont toujours à quelques mètres sous terre !
- ↪ le permafrost (sol gelé en profondeur lors de la dernière glaciation) ne dégèle que très superficiellement pendant l'été

TRANSFERTS THERMIQUES

II- Convection

II.A.- Loi de Newton

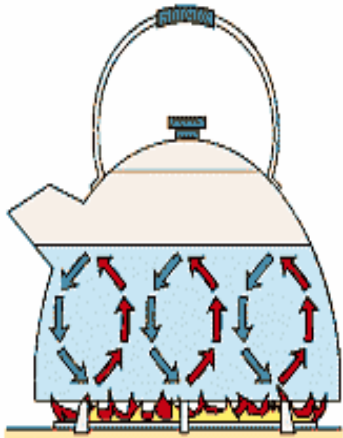


C'est le transfert de chaleur par des courants de fluides, liquides ou gazeux.

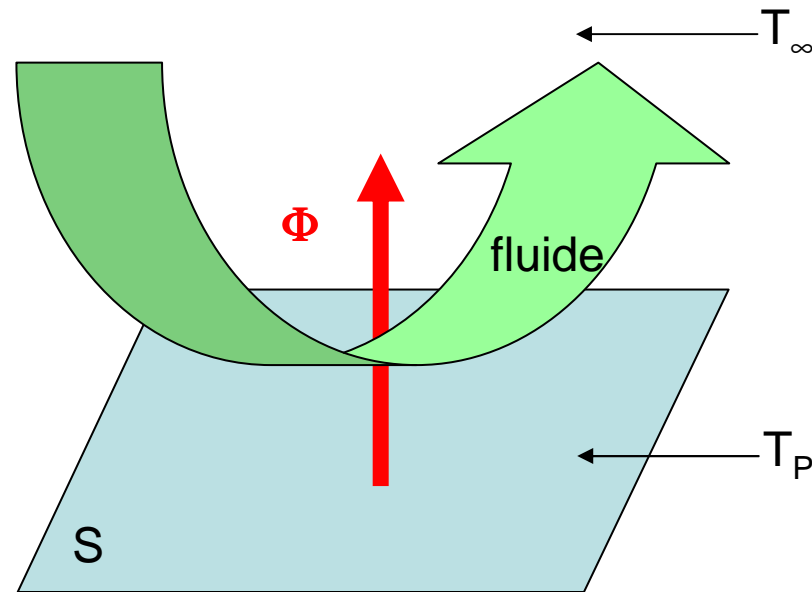
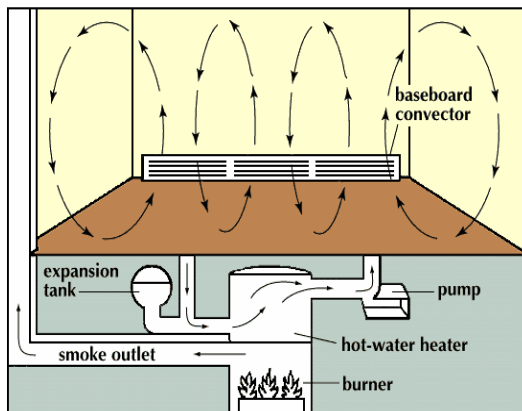
Ce phénomène peut se développer naturellement, les différences de potentiel motrices étant des différences de densité: c'est la **CONVECTION NATURELLE**.

On peut aussi le générer mécaniquement à l'aide de pompes ou de ventilateurs: c'est la **CONVECTION FORCÉE**.

Coefficient d'échange de chaleur par convection



convection = transfert de chaleur par déplacement de fluide
mécanisme de transfert décrit par la loi de Newton



$$\Phi = hS(T_P - T_\infty) \quad \text{loi de Newton}$$

Φ	Flux de chaleur transmis par convection	[W]
h	coefficient de transfert	[W.m ⁻² K ⁻¹]
T_P	température de la surface d'échange	[K, °C]
T_∞	température du fluide loin de la surface d'échange	[K, °C]
S	aire de la surface d'échange solide/fluide	[m ²]

La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction

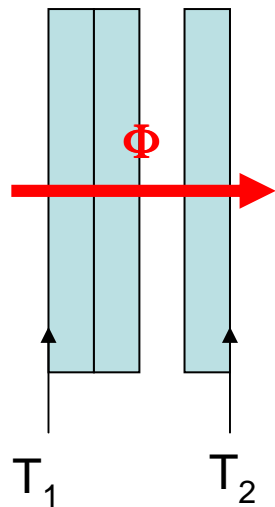
- ⇒ de la nature du fluide
- ⇒ de la température du fluide
- ⇒ de la vitesse de déplacement du fluide
- ⇒ des caractéristiques géométriques de la surface de contact

$$\Phi = hS(T_P - T_\infty)$$

$$\Delta T = \frac{\Phi}{h.S} = R_{th} \Phi$$

$$R_{th}^{conv} = \frac{1}{h.S}$$

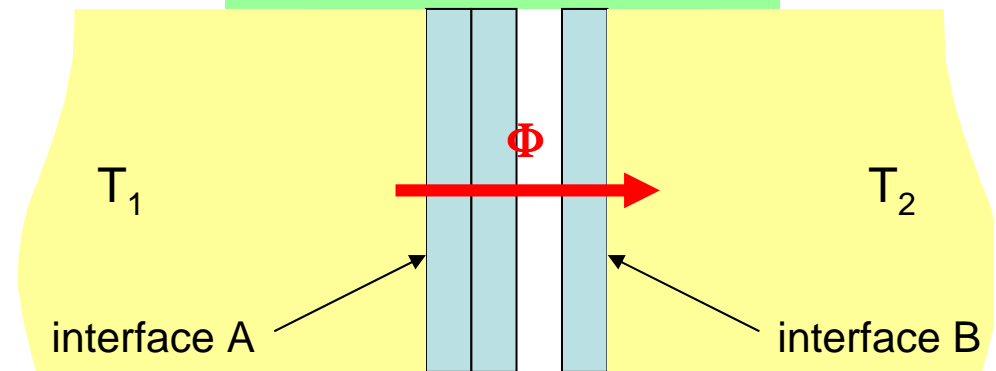
conduction pure



$$\Phi = \frac{T_1 - T_{N+1}}{\sum_{i=1 \dots N} R_i} = \frac{\Delta T}{R_T}$$

$$R_T = \sum_{i=1 \dots N} \frac{\delta_i}{\lambda_i S}$$

conduction + convection



$$\Phi = \frac{T_1 - T_{N+1}}{\frac{1}{h_A.S} + \sum_{i=1 \dots N} \frac{e_i}{\lambda_i.S} + \frac{1}{h_B.S}} = \frac{\Delta T}{R_T}$$

$$R_T = \frac{1}{h_A.S} + \sum_{i=1 \dots N} \frac{e_i}{\lambda_i.S} + \frac{1}{h_B.S}$$

Cylindre
 $2\pi rL$

Les lois relatives à la conduction s'appliquent également pour la convection (série, parallèle)

TRANSFERTS THERMIQUES

II- Convection

II.B.- Mécanismes de convection / régimes d'écoulement

Convection = transfert de chaleur par déplacement de matière (fluide)

☞ différents mécanismes de transfert

☞ le type d'écoulement est important dans la description du problème

Transferts de chaleur et transferts de masse liés → mécanique des fluides + transferts

Convection libre

Fluide en mouvement par les différences de masse volumique en son sein dues à ΔT et gravité

Convection forcée

Fluide en mouvement par une cause extérieure à la flottabilité (ventilateur, pompe...)

Écoulement laminaire

Écoulement directionnel (ou irrotationnel) → lignes de fluide parallèles (lignes de courant)

conduction dans une direction \perp aux lignes de courant

convection + conduction (négligeable) pour toute autre direction

Écoulement turbulent

Pas de direction privilégiée (pas unidirectionnel), mais déplacement d'ensemble possible

convection + conduction (négligeable) dans toutes les directions

Chaque situation fait intervenir un certain nombre de paramètres descriptifs de la situation

Problème majeur pour calculer le flux de chaleur par convection
la détermination de h !!!!!

Nombreux paramètres descriptifs

Analyse dimensionnelle

Théorème de VASCHY-BUCKINGHAM

Groupes adimensionnés (combinaisons des paramètres)

Mesures expérimentales → lois de corrélation entre groupes

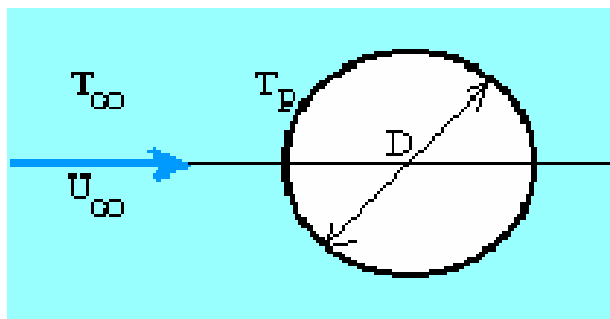
Détermination du coefficient h par connaissance des caractéristiques du fluide

Configuration	h ($Wm^{-2} \text{ } ^\circ C^{-1}$)
<u>Convection naturelle</u>	
Plaque verticale de hauteur 0,3 m dans l'air	4,5
Cylindre horizontal de diamètre 5 cm dans l'air	6,5
Cylindre horizontal de diamètre 2 cm dans l'eau	890
<u>Convection forcée</u>	
Courant d'air à 2 m/s sur une plaque carrée de 2 m de côté	12
Courant d'air à 35 m/s sur une plaque carrée de 0,75 m de côté	75
Eau à 0,5 kg/s dans un tube de diamètre 2,5 cm	3500
Courant d'air à 50 m/s perpendiculaire à un tube de diamètre 5 cm	180
<u>Ebullition de l'eau</u>	
Dans un récipient	2500-35000
En écoulement dans un tube	5000-100000
<u>Condensation de l'eau sous 1 atm</u>	
Sur une surface verticale	1000-11000
A l'extérieur de tubes horizontaux	10000-25000

TRANSFERTS THERMIQUES

II- Convection

II.C.- Analyse dimensionnelle appliquée à la convection forcée



Le problème consiste à préciser l'expression du flux thermique Φ échangé entre le fluide extérieur à la température T_∞ et une longueur unité de la surface du tuyau à la température T_p

Flux transféré,
en Watt

$$\Phi = h (T_p - T_\infty) \pi D$$

en $W/(m^2.K)$

Surface d'échange par
m de tuyau, en m^2

Ecart de température
entre paroi extérieure
et fluide à l'infini, en K

8 Grandeurs physiques et 4 dimensions: M, L, T et θ

<i>Grandeurs</i>	<i>Symbole</i>	<i>Unité S.I.</i>	<i>Équation aux dimensions</i>
Diamètre du tuyau	D	m	L
Vitesse du fluide	U_∞	m/s	LT^{-1}
Masse volumique du fluide	ρ	kg/m^3	ML^{-3}
Viscosité dynamique du fluide⁴	μ	$kg/(m.s)$	$ML^{-1}T^{-1}$
Conductivité thermique du fluide⁵	λ	$W/(m.K)$	$MLT^{-3}\theta^{-1}$
Capacité thermique massique du fluide⁶	C	$J/(kg.K)$	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$
Coefficient d'échange convectif	h	$W/(m^2.K)$	$MT^{-3}\theta^{-1}$
Écart de température	$T_p - T_\infty$	K	θ

Toute fonction G de p variables indépendantes x_i mesurée par q unités fondamentales (avec $p > q$) s'exprime nécessairement sous la forme :

$$G(x_1, x_2, \dots, x_q) = x_1^a x_2^b \dots x_q^g F(\pi_{q+1}, \pi_{q+2}, \dots, \pi_p) = 0$$

les variables x_1, x_2, \dots, x_q étant choisies dimensionnellement indépendantes. Les fonctions π_i sont des groupements adimensionnels des variables x_1, x_2, \dots, x_p . Dans la pratique, on choisit pour x_1, x_2, \dots, x_q les paramètres que l'on considère comme essentiels pour le problème considéré et que l'on veut voir figurer explicitement dans l'expression de G.

Le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM permet donc de prévoir que la forme la plus générale de la loi physique décrivant le phénomène étudié s'écrira:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0 \quad \pi_i : \text{groupements sans dimension de la forme:} \quad \pi = D^a \lambda^b U_\infty^c \rho^d \mu^e C^f h^g (T_p - T_\infty)^i$$

Matrice dimensionnelle

	D	λ	U_∞	ρ	μ	C	h	$T_p - T_\infty$
L, longueur →	1	1	1	-3	-1	2	0	0
M, masse →	0	1	0	1	1	0	1	0
T, temps →	0	-3	-1	0	-1	-2	-3	0
θ , température →	0	-1	0	0	0	-1	-1	1
Dimensions →	L	$LMT^{-3}\theta^{-1}$	LT^{-1}	$L^{-3}M$	$L^{-1}MT^{-1}$	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	$MT^{-3}\theta^{-1}$	θ
exposant →	a	b	c	d	e	f	g	i

Le rang de cette matrice est 4 (nombres de vecteurs indépendants)

→ On choisit 4 vecteurs tels que

toutes les dimensions soient représentées

ils soient des vecteurs indépendants (D, λ , μ , ρ) ok, (D, λ , h, ρ) non ok car $[h]=[\lambda] - [D]$

→ les vecteurs restants $[\alpha_i]$ au nombre de 4 (8 variables - 4 dimensions) → calcul de $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$

$$\pi_i = D^a \lambda^b \rho^d \mu^e \cdot \alpha_i^{\text{exposant}_i}$$

Obtention des groupements

Considérons que $D, \lambda, \mu,$ et ρ (vecteurs indépendants soient les grandeurs fondamentales de notre problème, $8x_i-4x_i(\text{indep})=4\alpha_i$

$$G(D, \lambda, \mu, \rho, U_\infty, C, h, \Delta T) = D^a \lambda^b \mu^e \rho^d F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$$

$$\Rightarrow F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$$

$$\pi_i = D^a \lambda^b \rho^d \mu^e \cdot \alpha_i^{\text{exposant}_i}$$

5 inconnues ($a, b, d, e, \text{exposant}_i$) et 4 équations \rightarrow 1 des exposants peut être choisi **arbitrairement**

\Rightarrow divers groupements sont donc obtenus, mais certains se sont imposés par leur utilité

Calcul de π_1 pour $\alpha_1=h$

$$\pi_1 = D^a \lambda^b \rho^d \mu^e \cdot h^g = [L]^a [LMT^{-3}\theta^{-1}]^b [L^{-3}M]^d [L^{-1}MT^{-1}]^e [MT^{-3}\theta^{-1}]^g$$

Longueur	:	$a+b-3d-e=0$
Masse	:	$b+d+e+g=0$
Temps	:	$-3b-e-3g=0$
Température	:	$-b-g=0$

5 inconnues (a, b, d, e, g) / 4 équations
 \rightarrow Hypothèse : $g=1$ soit $h=h(\dots)$

$$g = 1 \rightarrow b = -g = -1 \rightarrow e = -3b-3g = 0 \rightarrow d = -b-e-g = 0 \rightarrow a = -b+3d+e=1$$

$$\pi_1 = \mathbf{Nu} = \frac{hD}{\lambda}$$

Calcul de π_2 pour $\alpha_2 = U_\infty$

$$\pi_2 = D^a \lambda^b \rho^d \mu^e U_\infty^c = [L]^a [LMT^{-3}\theta^{-1}]^b [L^{-3}M]^d [L^{-1}MT^{-1}]^e [LT^{-1}]^c$$

Longueur	:	$a+b-3d-e+c = 0$
Masse	:	$b+d+e = 0$
Temps	:	$-3b-e-c = 0$
Température	:	$-b = 0$

5 inconnues (a, b, c, d, e) / 4 équations
 → Hypothèse : c=1 soit $U_\infty = U_\infty(\dots)$

$$c = 1 \rightarrow b = 0 \rightarrow e = -3b - c = -1 \rightarrow d = -b - e = 1 \rightarrow a = -b + 3d + e - c = 1$$

$$\pi_2 = \mathbf{Re} = \frac{\rho U_\infty D}{\mu}$$

Calcul de π_3 pour $\alpha_3 = C$

$$\pi_3 = D^a \lambda^b \rho^d \mu^e C^f = [L]^a [LMT^{-3}\theta^{-1}]^b [L^{-3}M]^d [L^{-1}MT^{-1}]^e [L^2T^{-2}\theta^{-1}]^f$$

Longueur	:	$a+b-3d-e+2f = 0$
Masse	:	$b+d+e = 0$
Temps	:	$-3b-e-2f = 0$
Température	:	$-b-f = 0$

5 inconnues (a, b, d, e, f) / 4 équations
 → Hypothèse : f=1 soit $C=C(\dots)$

$$f = 1 \rightarrow b = -f = -1 \rightarrow e = -3b - 2f = 1 \rightarrow d = -b - e = 0 \rightarrow a = -b + 3d + e - 2f = 0$$

$$\pi_3 = \mathbf{Pr} = \frac{\mu C}{\lambda}$$

Calcul de π_4 pour $\alpha_4 = T_P - T_\infty$

$$\pi_4 = D^a \lambda^b \rho^d \mu^e (T_P - T_\infty)^i = [L]^a [LMT^{-3}\theta^{-1}]^b [L^{-3}M]^d [L^{-1}MT^{-1}]^e [\theta]^i$$

Longueur	:	$a+b-3d-e = 0$
Masse	:	$b+d+e = 0$
Temps	:	$-3b-e = 0$
Température	:	$-b+i = 0$

5 inconnues (a, b, d, e, i) / 4 équations
 → Hypothèse : i=1 soit $C=C(\dots)$

$$i = 1 \rightarrow b = i = 1 \rightarrow e = -3b = -3 \rightarrow d = -b - e = 2 \rightarrow a = -b + 3d + e = 2$$

$$\pi_4 = \frac{D^2 \lambda \rho^2}{\mu^3} (T_P - T_\infty) = \frac{C}{\mathbf{Pr}} \left(\frac{\mathbf{Re}}{U_\infty} \right)^2 (T_P - T_\infty)$$

$$\mathbf{Ec} = \frac{U_\infty^2}{C(T_P - T_\infty)}$$

Corrélations – conclusion de l'analyse dimensionnelle

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0 \quad \longrightarrow \quad F(\mathbf{Nu}, \mathbf{Re}, \mathbf{Pr}, \mathbf{Ec}) = 0$$

En écoulement subsonique $F(\mathbf{Nu}, \mathbf{Re}, \mathbf{Pr}) = 0 \Rightarrow \mathbf{Nu} = f(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr})$

$$\frac{hD}{\lambda} = f\left(\frac{\rho U_\infty D}{\mu}, \frac{\mu C}{\lambda}\right)$$

La méthode dimensionnelle fournit les grandeurs réduites

- elle ne donne pas la relation qui les lie
- les relations sont donc obtenues par dépouillement de données expérimentales
- recherche dans les tables, bibliographies, ...

Écoulement sur un plan	<p>$Nu(x)$: Nu à la distance x du bord du plan \overline{Nu}_L : Nu moyen sur la longueur L du plan</p> <p>Écoulement turbulent :</p> $Nu(x) = 0,0288 Re(x)^{0,8} Pr^{1/3} \quad Re > 5 \cdot 10^5 \text{ et } Pr \geq 0,5$ $\overline{Nu}_L = 0,035 Re_L^{0,8} Pr^{1/3}$ <p>Écoulement laminaire :</p> $Nu(x) = 0,324 Re(x)^{0,5} Pr^{1/3} \quad Re < 5 \cdot 10^5 \text{ et } 10 \geq Pr \geq 0,5$ $\overline{Nu}_L = 0,628 Re_L^{0,5} Pr^{1/3}$
Écoulement dans un tube	<p>Écoulement turbulent : $Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^n$</p> <p>$n = 0,3$ si $\theta_{\text{fluide}} > \theta_{\text{paroi}}$ $n = 0,4$ si $\theta_{\text{fluide}} < \theta_{\text{paroi}}$ $Re > 5000 \text{ et } 0,6 < Pr < 100$</p> <p>Re calculé pour $D_H = 4S / P$ où : S = section de passage du fluide P = périmètre de contact fluide/paroi</p> <p>Écoulement laminaire : $Nu = 1,86 (Re Pr)^{1/3} \left(\frac{D}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0,14}$</p> <p>Valable pour $Re Pr \frac{D}{L} \geq 10$, μ_p calculé à θ_p</p>

Caractéristiques
du fluide calculées
en $\theta = (\theta_p - \theta_\infty) / 2$

Eau à 50 °C

$$\rho = 988 \text{ kg/m}^3$$

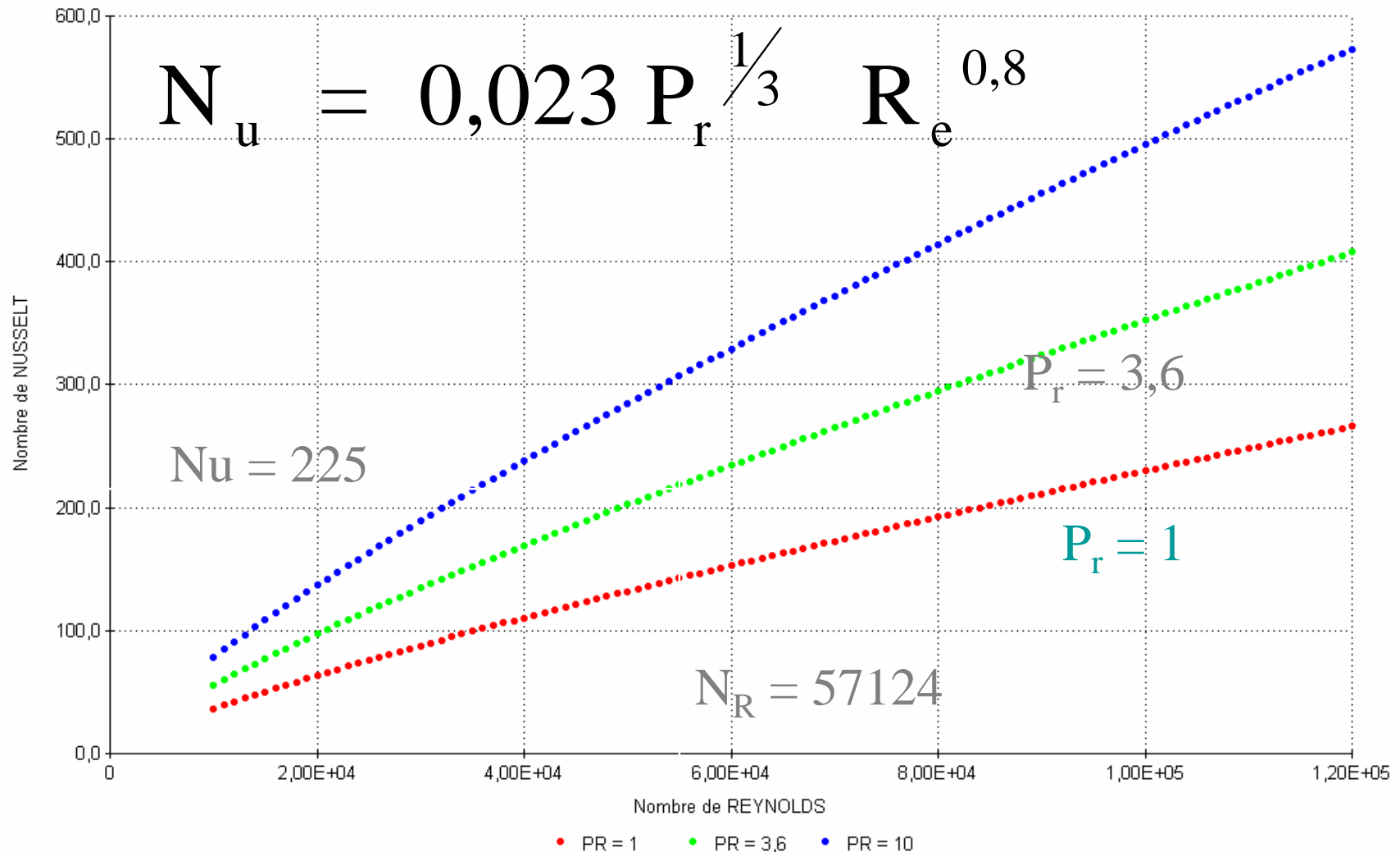
$$\mu = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

$$\lambda = 0,639 \text{ W/(m.}^\circ\text{C)}$$

$$C = 4.184 \text{ J/(kg.}^\circ\text{C)}$$

Calcul du Nombre de Nusselt (Formule de Colburn)

Formule de Colburn



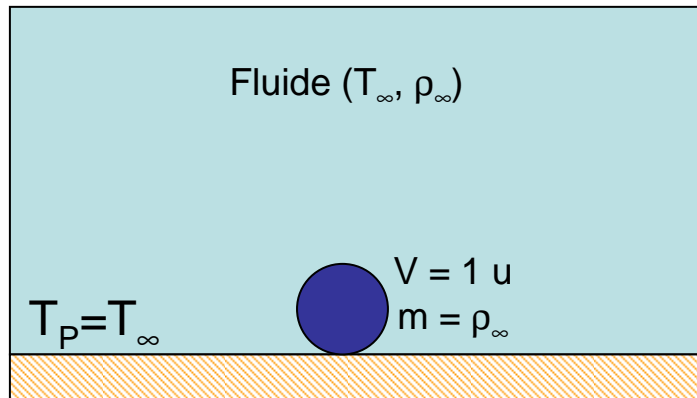
Les résultats expérimentaux sont généralement exprimés sous la forme

$$Nu = \psi + \eta Re^k Pr^\xi$$

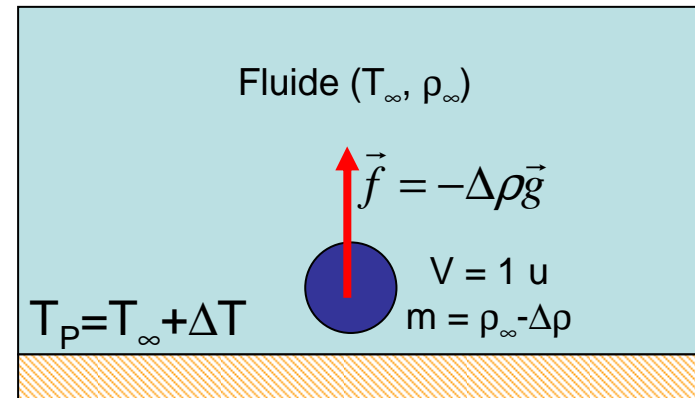
TRANSFERTS THERMIQUES

II- Convection

II.D.- Cas de la convection libre (dite naturelle)



$t=t_0$



$t=t_0+dt$

Force ascensionnelle $\vec{f} = \sum \vec{F} = \vec{P}_{Archimède} + \vec{P}_{oids} = -\rho_0 V \vec{g} + (\rho_0 - \Delta\rho) V \vec{g} = -\Delta\rho V \vec{g}$

Accélération de la bulle $\sum \vec{F} = m \vec{\gamma} \rightarrow -\Delta\rho V \vec{g} = (\rho_0 - \Delta\rho) V \vec{\gamma} \rightarrow \vec{\gamma} = -\frac{\Delta\rho}{\rho_0 - \Delta\rho} \vec{g} \cong -\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \vec{g}$

Coefficient de dilatation $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{m/\rho} \left(\frac{\partial m/\rho}{\partial T} \right)_p = \rho \left(\frac{\partial 1/\rho}{\partial T} \right)_p$

or $\frac{d(1/F(x))}{dx} = \frac{d(F(x)^{-1})}{dx} = -1 \cdot \frac{dF(x)}{dx} \cdot F(x)^{-2}$

$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \cong \frac{1}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}$

Module de l'accélération produite par l'expansion thermique

$\gamma = \beta g \Delta T$

- β [K⁻¹]
- g [m.s⁻²]

Accélération = mouvement

Le gradient de température induit un gradient de masse volumique et donne naissance à un **courant de convection**

Application courante :

- ascension de l'air proche du sol au lever du soleil → développement d'une couche limite convective au-dessus du sol (mais complexe car couplage avec l'humidité)
- l'ascension des masses d'air cesse lorsque la température du fluide diminue (gradient thermique de l'atmosphère), où que la température ambiante augmente.
- l'atmosphère possède souvent une inversion thermique autour de 2000 m (T croît avec altitude au-delà !) → limite le développement de la couche convective (air froid sous air chaud) = CLA

$\beta g \Delta T$ ou $\beta g (T - T_\infty)$ est le module de l'accélération du fluide en mouvement. β est appelé coefficient de flottabilité en science de l'atmosphère.

Les paramètres décrivant le transfert sont donc les caractéristiques

➤ du fluide : $\lambda, \rho, \mu, C, \beta, g$

➤ de la paroi : L (ou D), h

➤ de la différence de température ($T_P - T_\infty$) +humidité

9 grandeurs, 4 dimensions (L, M, T, θ)

→ 5 nombre adimensionnés

→ 3 groupements couramment utilisés

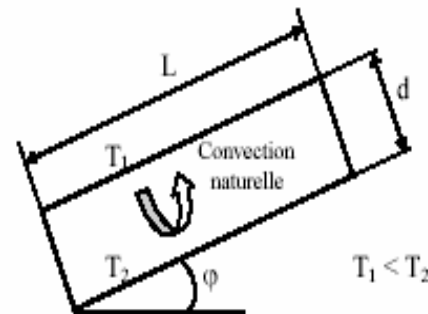
$$\mathbf{Nu} = \frac{hL}{\lambda} \quad \mathbf{Gr} = \frac{\beta g (T_P - T_\infty) \rho_\infty^2 L^3}{\mu^2} \quad \mathbf{Pr} = \frac{C\mu}{\lambda}$$

$$\mathbf{Nu} = f(\mathbf{Gr}, \mathbf{Pr})$$

Corrélations valables pour tous fluides : $Nu = C (Gr Pr)^m$

Géométrie	Gr Pr	C	m
Plaques et cylindres verticaux	$10^4 - 10^9$	0,59	1/4
	$10^9 - 10^{13}$	0,021	2/5
Cylindres horizontaux	$10^{-10} - 10^{-2}$	0,675	0,058
	$10^{-2} - 10^2$	1,02	0,148
	$10^2 - 10^4$	0,850	0,188
	$10^4 - 10^7$	0,480	0,25
	$10^7 - 10^{12}$	0,125	0,33

Cellule fermée rectangulaire inclinée



$$Nu = 1 + 1,44 \left(1 - \frac{1708}{Gr Pr \cos \varphi} \right) \left[1 - \frac{1708 (\sin(1,8 \varphi)^{1,6})}{Gr Pr \cos \varphi} \right] +$$

$$\left[\left(\frac{Gr Pr \cos \varphi}{5830} \right)^{1/3} - 1 \right] \quad \text{si } 0 < \varphi < \varphi^*$$

$$Nu = (\sin \varphi)^{1/4} Nu(90^\circ) \quad \text{si } \varphi^* < \varphi < 90^\circ$$

$$Nu = 1 + [Nu(90^\circ) - 1] \sin \varphi \quad \text{si } 90^\circ < \varphi < 180^\circ$$

Avec $\varphi^* = \tan^{-1}(4800 Pr)$

Relations simplifiées pour de l'air à pression atmosphérique

Géométrie	Laminaire $10^4 < Gr Pr < 10^9$	Turbulent $Gr Pr > 10^9$
Plaque ou cylindre vertical	$h = 1,42 \left(\frac{\Delta\theta}{L} \right)^{1/4}$	$h = 1,31 (\Delta\theta)^{1/3}$
Cylindre horizontal	$h = 1,32 \left(\frac{\Delta\theta}{D} \right)^{1/4}$	$h = 1,24 (\Delta\theta)^{1/3}$

TRANSFERTS THERMIQUES

II- Convection

II.E.- Méthodologie de résolution des problèmes de convection

Convection forcée

- 1- calcul des nombres adimensionnés Re et Pr
- 2- suivant la valeur de Re et la configuration → choix de la corrélation
- 3- calcul du nombre Nu par application de la corrélation
- 4- calcul de $h = \lambda Nu/D$ (ou $\lambda Nu/L$) et de $\phi = hS(T_p - T_\infty)$

Convection naturelle

- 1- calcul des nombres adimensionnels Gr et Pr
- 2- suivant la valeur de Gr et la configuration → choix de la corrélation
- 3- calcul du nombre Nu par application de la corrélation
- 4- calcul de $h = \lambda Nu/D$ (ou $\lambda Nu/L$) et de $\phi = hS(T_p - T_\infty)$

Il faut dans tous les cas connaître ρ , λ , μ , et C du fluide aux températures considérées

Généralement, les résultats obtenus sont approximatifs (précision de la corrélation)

problèmes intéressants, mais complexes : convection avec changement d'état

TRANSFERTS THERMIQUES

II- Convection

II.F.- Interprétation des nombres adimensionnés

Nu : nombre de NUSSELT

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{convection} &= hS(T_P - T_\infty) \\ \Phi_{conduction} &= \frac{\lambda S}{L}(T_P - T_\infty) \end{aligned} \right\} \mathbf{Nu} = \frac{hL}{\lambda} = \frac{L/\lambda}{1/h} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{\Phi_{convection}}{\Phi_{conduction}}$$

Caractérise le type de transfert
(convectif ou conductif)

Re : nombre de REYNOLDS

$$\left. \begin{aligned} F_{inertie} &\approx \rho \frac{U_\infty^2}{D} \\ F_{viscosité} &\approx \mu \frac{U_\infty}{D^2} \end{aligned} \right\} \mathbf{Re} = \frac{\rho \frac{U_\infty^2}{D}}{\mu \frac{U_\infty}{D^2}} = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} = \frac{U_\infty D}{\nu} = \frac{F_{inertie}}{F_{viscosité}}$$

Caractérise le régime d'écoulement
(laminaire, transitoire, turbulent)

Cas d'une tuyauterie

Re > 5000 : turbulent

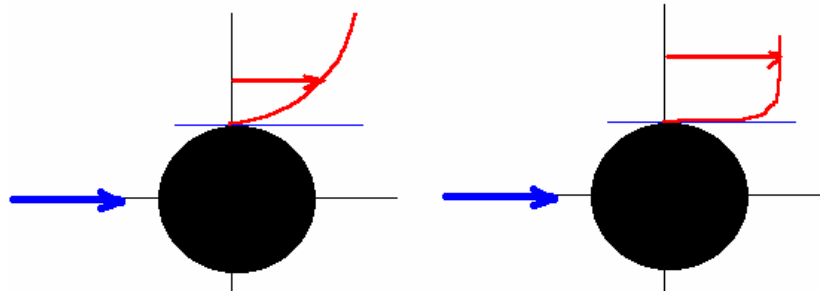
2400 < Re < 5000 : transitoire (???)t

Re < 2400 : laminaire

Re = 2400 (et $U_\infty = \nu Re / D$)

eau $U_\infty = 24 \cdot 10^{-4} / D$ [m/s]

air $U_\infty = 360 \cdot 10^{-4} / D$ [m/s]



Re faible (petit mélange)

Re fort (grand mélange)

Pr : nombre de PRANTDL

$$\left. \begin{array}{l} \text{viscosité}_{\text{dynamique}} = \frac{\mu}{\rho} \\ \text{diffusivité}_{\text{thermique}} = \frac{\lambda}{\rho C} \end{array} \right\} \mathbf{Pr} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{\lambda}{\rho C}} = \frac{\mu C}{\lambda} = \frac{\text{viscosité}_{\text{dynamique}}}{\text{diffusivité}_{\text{thermique}}}$$

Caractérise les profils de vitesse et de température
(importance de la diffusion visqueuse / à la diffusion thermique)

Gr : nombre de GRASHOF

$$\left. \begin{array}{l} F_{\text{ascensionnelle}} = \rho \gamma = \rho \beta g \Delta T \\ F_{\text{viscosité}} \approx \mu \frac{U_{\infty}}{L^2} \\ F_{\text{inertie}} \approx \rho \frac{U_{\infty}^2}{L} \end{array} \right\} \mathbf{Gr} = \frac{(\rho \beta g \Delta T) \left(\rho \frac{U_{\infty}^2}{D} \right)}{\left(\mu \frac{U_{\infty}}{D^2} \right)^2} = \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^2 \beta g (T_p - T_{\infty}) L^3 = \frac{F_{\text{ascensionnelle}} \cdot F_{\text{inertie}}}{F_{\text{viscosité}} \cdot F_{\text{viscosité}}}$$

F_{inertie}
$F_{\text{viscosité}}$

Re

Caractérise le rapport des effets thermiques aux effets visqueux
en convection naturelle

Ri : nombre de RICHARDSON

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{inertie}} &= \rho \frac{U_{\infty}^2}{L} \\ F_{\text{ascensionnelle}} &= \rho \gamma = \rho \beta g \Delta T \end{aligned} \right\} \mathbf{Ri} = \frac{\rho \beta g (T_P - T_{\infty})}{\rho \frac{U_{\infty}^2}{L}} = \frac{\beta g (T_P - T_{\infty}) L}{U_{\infty}^2} = \frac{F_{\text{ascensionnelle}}}{F_{\text{inertie}}}$$

Caractérise le rapport des forces d'Archimède aux forces d'inertie

Ri >> 1 : Archimède >> inertie → convection naturelle dont le moteur d'écoulement est Archimède

Ri = 1 : Archimède du même ordre de grandeur que inertie → vitesse caractéristique U_0

$$U_0 = \sqrt{\frac{\beta g (T_P - T_{\infty}) L}{\mathbf{Ri}}} = [\beta g (T_P - T_{\infty}) L]^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{Gr} = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^2 \beta g (T_P - T_{\infty}) L^3 = \left(\frac{U_0 L}{\nu}\right)^2 \cong \mathbf{Re}^2$$

$\mathbf{Gr}^{\frac{1}{2}}$ équivalent analogue à un Re en convection naturelle (laminaire/turbulente)

Ec : nombre d'ECKERT

$$\mathbf{Ec} = \frac{U_{\infty}^2}{C(T_P - T_{\infty})} = \frac{\rho U_{\infty}^2}{\rho C(T_P - T_{\infty})}$$

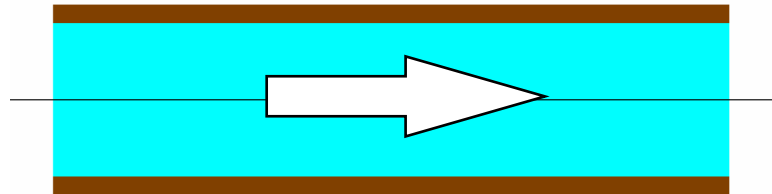
Caractérise le rapport de l'énergie mécanique et de l'énergie thermique (phénomène de conversion que l'on rencontre dans les tuyères à nombre de Mach élevé)

TRANSFERTS THERMIQUES

II- Convection

II.G.- Exemple d'application

1- une géométrie : un tuyau à section circulaire transportant de l'eau chaude.



2- une dimension caractéristique : un diamètre $D = 20 \text{ mm}$

3- un écart de température $T_p - T_\infty$ entre la paroi et le fluide, par exemple $T_p = 15^\circ\text{C}$ et $T_\infty = 50^\circ\text{C}$

4- un fluide en écoulement à la vitesse moyenne U_∞ : le tuyau transporte un débit $Q = 0,5 \text{ l/s}$

La vitesse moyenne d'écoulement est donc $U_\infty = Q/S = 1,6 \text{ m/s}$

5- un fluide de caractéristiques ρ, μ, C, λ dans le domaine T_p et T_∞ (la moyenne par exemple)

Eau à 50°C : $\rho = 988 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\lambda = 0,639 \text{ W/(m.}^\circ\text{C)}$, $C = 4184 \text{ J/(kg.}^\circ\text{C)}$

6- calcul des nombres adimensionnés **Re** et **Pr** pour obtenir **Nu**

$$\mathbf{Nu} = f(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr}) \rightarrow \frac{hD}{\lambda} = f\left(\frac{\rho U_{\infty} D}{\mu}, \frac{\mu C}{\lambda}\right)$$

$$\mathbf{Pr} = \frac{\mu C}{\lambda} = \frac{0,55 \cdot 10^{-3} \cdot 4184}{0,639} = 3,60$$

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho U_{\infty} D}{\mu} = \frac{988 \cdot 1,6 \cdot 0,02}{0,55 \cdot 10^{-3}} = 57,124$$

7- calcul de **Nu** par choix d'une corrélation

$$\mathbf{Nu} = f(\mathbf{Re}, \mathbf{Pr}) \rightarrow \frac{hD}{\lambda} = f\left(\frac{\rho U_{\infty} D}{\mu}, \frac{\mu C}{\lambda}\right)$$

pour $10^4 < Re < 1,2 \cdot 10^5$ et $0,7 < Pr < 100$
on applique la corrélation de COLBURN

$$\mathbf{Nu} = 0,023 \mathbf{Pr}^{\frac{1}{3}} \mathbf{Re}^{0,8} = 224$$

8- calcul de **h**

$$\mathbf{Nu} = \frac{hD}{\lambda} \rightarrow h = \frac{\lambda}{D} \mathbf{Nu} = \frac{0,639}{0,02} 224 = 7156 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

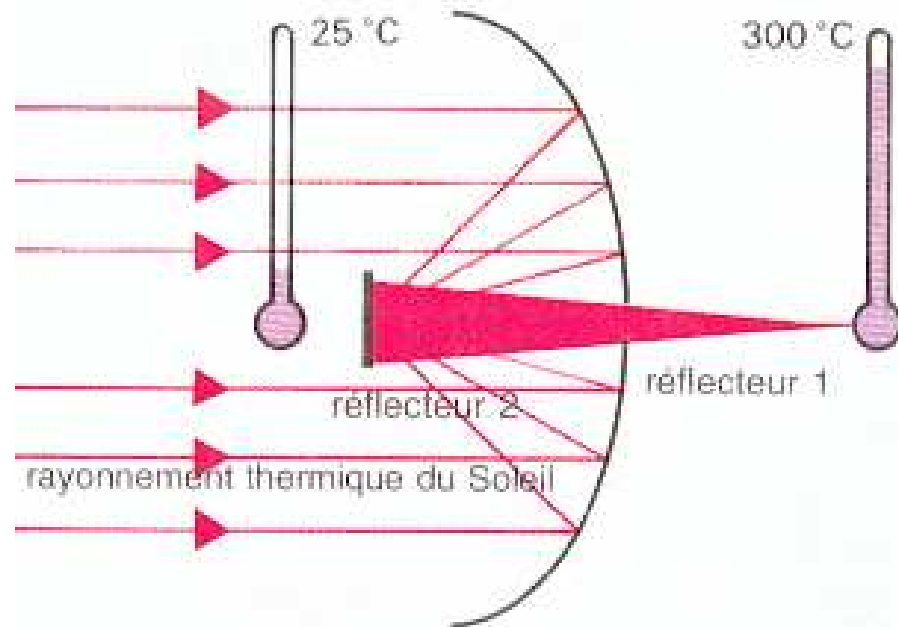
9- calcul du flux de chaleur

$$\Phi = hS(T_p - T_{\infty}) = h \cdot \pi D \cdot L (T_p - T_{\infty}) = 15,7 \text{ kW} / \text{m}$$

TRANSFERTS THERMIQUES

III- Rayonnement

III.A.- Généralités



Principe d'un four solaire:

Le rayonnement solaire concentré par le miroir parabolique élève la température du récepteur jusqu'à 300 °C

Cette forme de transfert d'énergie n'a besoin d'aucun milieu de transport.

Ce transfert a également lieu dans le vide.

La différence de potentiel motrice est la différence entre les **puissances quatrièmes** des températures de la source et du récepteur.

Rayonnements

➔ phénomène de surface

➔ $E = h\nu = hc/\lambda$

➔ $c = \lambda\nu = c_0/n$ ($c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ dans le vide)

➔ passage n_1 / n_2 : $\nu_1 = \nu_2 = \nu = c_1/\lambda_1 = c_2/\lambda_2$

Nomenclature générale

λ	ν	domaine
3 km	100 khz	ondes radio
300 m	1MHz	
30 m	10 MHz	
3 m	100 MHz	
30 cm	1 GHz	micro-ondes
3 cm	10 GHz	
0.3 cm	100 GHz	
300 μm		infrarouge thermique
30 μm		
3 μm		vis, pir, mir
0.3 μm		ultraviolet
300 A		rayons X
30 A		
3 A		
0.3 A		rayons Gamma
0.03 A		

Rayonnement Direct

- ☞ reçu dans la direction du soleil (en terme d'angle)
- ☞ rayons parallèles (car source lointaine)
- ☞ peut former des **ombres** et être **concentrés**
- ☞ la quantité de rayonnement reçue par une surface au sol dépend alors de son **orientation**

Rayonnement Diffus

- ☞ issu de l'interaction du rayonnement direct avec l'atmosphère
- ☞ **pas de direction de propagation privilégiée**
- ☞ par temps couvert, diffusion isotrope (on reçoit la même quantité de rayonnement \forall l'**orientation** de la surface réceptrice au sol)
- ☞ une surface \perp à la surface du sol peut capter plus d'énergie de rayonnement que si elle était //

Toute surface est soumise aux deux types de rayonnement.

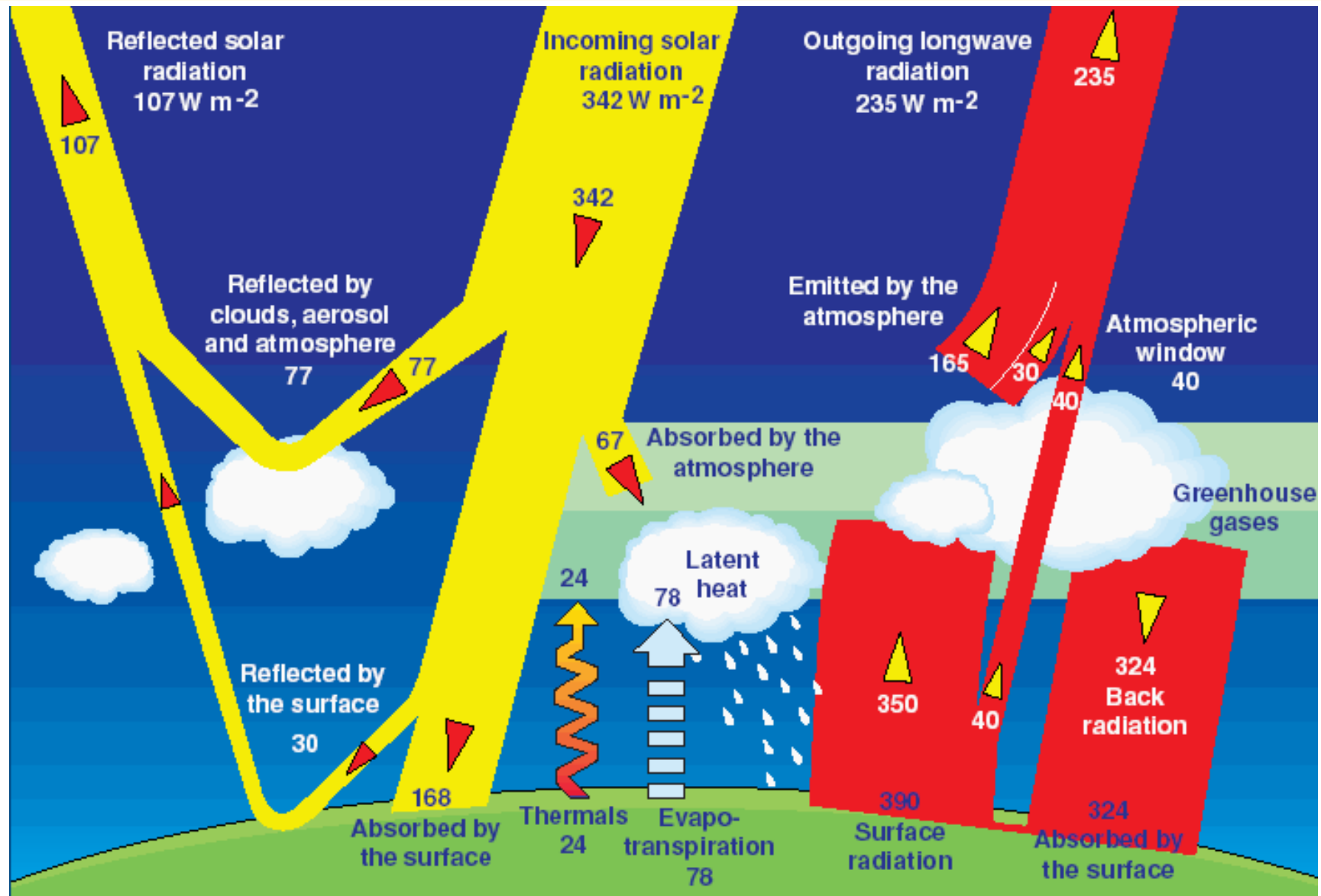
lumière = partie visible du spectre [0,3 μm ; 3 μm]

Variabilité du rayonnement solaire à la surface terrestre

- ☞ conditions de surface (albédo du site = pouvoir de réflexion)
- ☞ conditions atmosphériques (humidité de l'air, gaz, aérosols, nuages, température)
- ☞ conditions positionnelles (lieu géographique, saison, heure de la journée)

On établit des cartes d'ensoleillement pour l'estimation du gisement solaire (mesures, modélisations)

Rayonnements à la surface terrestre

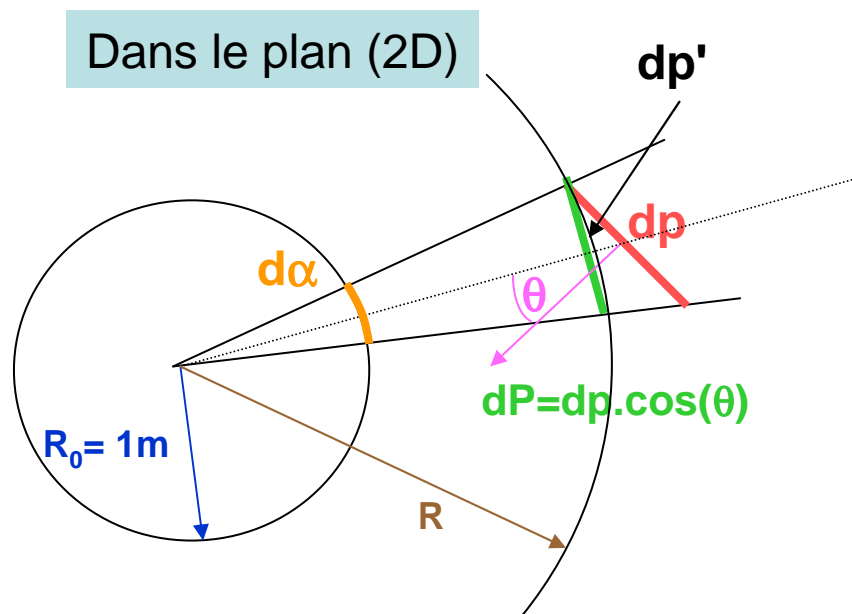


TRANSFERTS THERMIQUES

III- Rayonnement

III.B.- Découpage de l'espace et Angle solide

Dans le plan (2D)

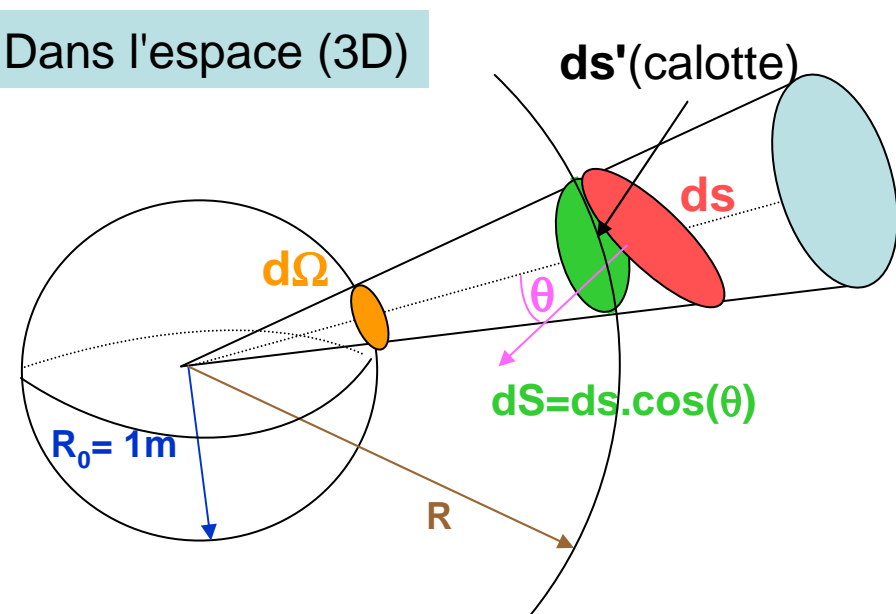


- ➔ si R assez grand $\rightarrow dp' \approx dP$
- ➔ $dP = R d\alpha \rightarrow d\alpha = dP/R = dp \cdot \cos(\theta)/R$
- ➔ $d\alpha = \text{angle [rad]} = \text{mesure de périmètre}$

$$P = \int_{\text{Cercle}} dP = R \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi R$$

- ➔ plan = 2π rad ; $1/2$ plan = π ; $1/4$ plan = $\pi/2$

Dans l'espace (3D)

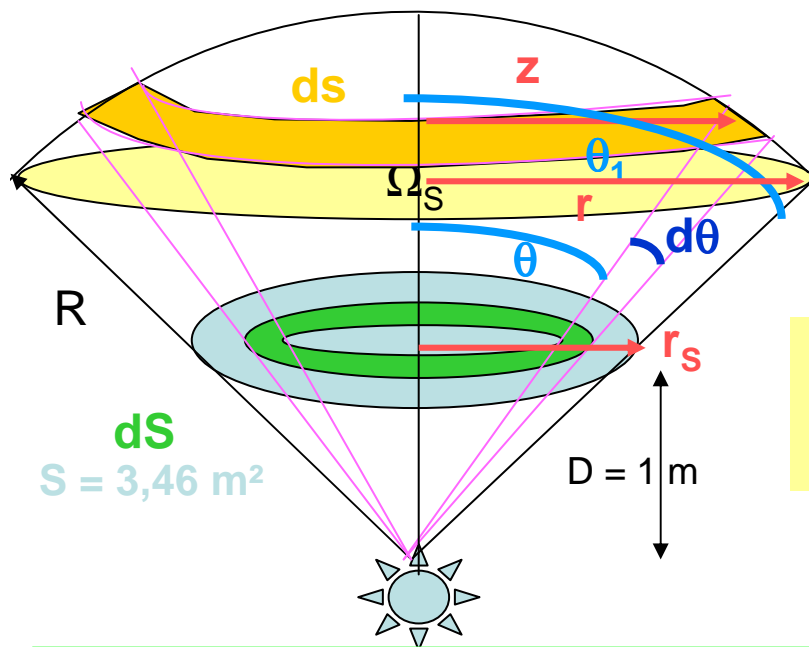


- ➔ si R assez grand $\rightarrow ds' \approx dS$
- ➔ $dS = R^2 d\Omega \rightarrow d\Omega = dS/R^2 = ds \cdot \cos(\theta)/R^2$
- ➔ $d\Omega = \text{angle solide [sr]} = \text{mesure de surface}$

$$S = \int_{\text{Sphère}} dS = R^2 \int_0^{4\pi} d\Omega = 4\pi R^2$$

- ➔ espace = 4π srad ; $1/2$ espace = 2π ; $1/4$ plan = π

Application : rayonnement d'une source ponctuelle vers une surface plane circulaire



Évaluation du rayonnement reçu sur une surface plane circulaire de rayon $r_s = 1$ m en provenance d'une source ponctuelle de puissance $\Phi = 1000$ W placée à $D = 1$ m

Intensité dans une direction quelconque $I = \Phi/4\pi$ W.sr⁻¹
 Flux reçu par dS : $d\Phi = I \cdot d\Omega$
 Flux reçu par S : $\Phi = I \cdot \Omega_S = (\Phi/4\pi) \cdot \Omega_S$

Calcul de Ω_S :

L'angle solide $d\Omega$ s'appuyant sur dS découpe la sphère de rayon R suivant une couronne sphérique (rayon moyen z , largeur $Rd\theta$) $\rightarrow ds = 2\pi z R d\theta = 2\pi R \sin\theta R d\theta \rightarrow d\Omega = ds/R^2 = 2\pi \sin\theta d\theta$

Donc $\Omega_S = 2\pi[-\cos\theta] = 2\pi(1 - \cos\theta_1)$ avec $\cos\theta_1 = D/[r_s^2 + D^2]^{1/2}$

$$\Omega_S = 2\pi \left(1 - \frac{D}{\sqrt{r_s^2 + D^2}}\right) = 1,84 \text{ sr} = 14,64\% \text{ de l'espace}$$

$$\Phi_S = \Phi \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D}{\sqrt{r_s^2 + D^2}}\right) = 146,45 \text{ W} = 14,64\% \text{ de } \Phi$$

Si $r_s \rightarrow \infty$, $\Omega_S \rightarrow 2\pi$, donc demi-sphère et $\Phi_S \rightarrow \Phi/2$

Si $r_s \rightarrow 0$, $\Omega_S \rightarrow 0$, et $\Phi_S \rightarrow 0$

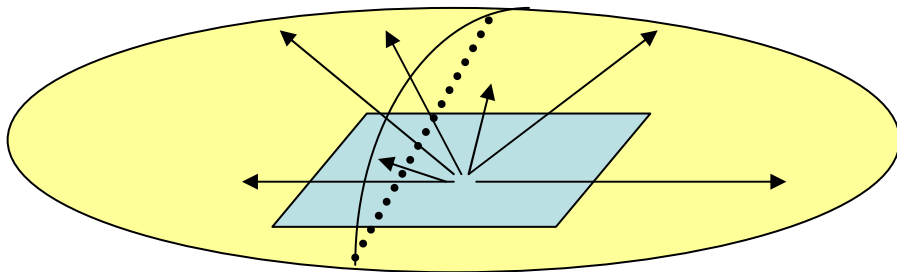
TRANSFERTS THERMIQUES

III- Rayonnement

III.C.- Caractérisation des sources émettant un rayonnement

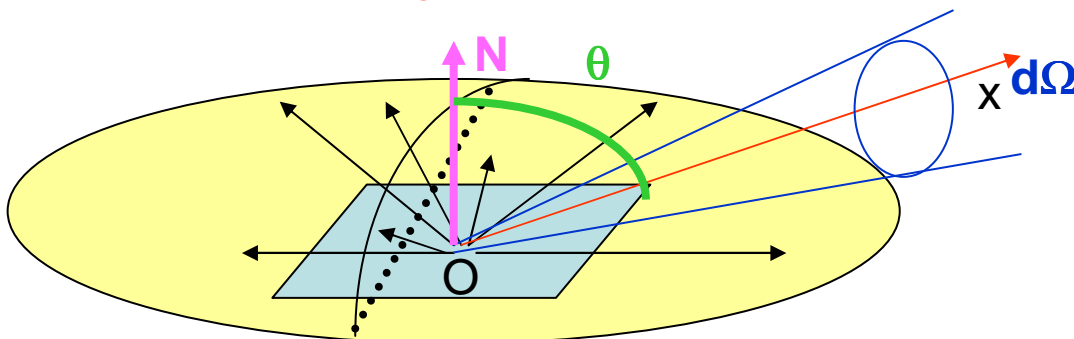
Flux totale Φ d'une source [W]

- puissance émise par une source dans tout l'espace où elle peut rayonner
- si source = plan → espace = hémisphère / si source = point (source ponctuelle) → espace = sphère



Intensité I_{Ox} dans une direction Ox [W.sr⁻¹]

- flux par unité d'angle solide dans la direction Ox



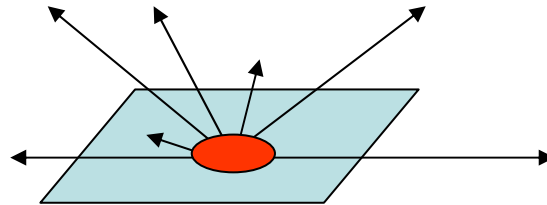
$$I_{Ox} = \frac{d^2\Phi_{Ox}}{d\Omega} \quad [\text{W.sr}^{-1}]$$

Source ponctuelle isotrope $I_{Ox} = \frac{\Phi_{Ox}}{4\pi}$

Source plane isotrope $I_{Ox} = \frac{\Phi_{Ox}}{2\pi}$

Emittance totale M [W.m^{-2}]

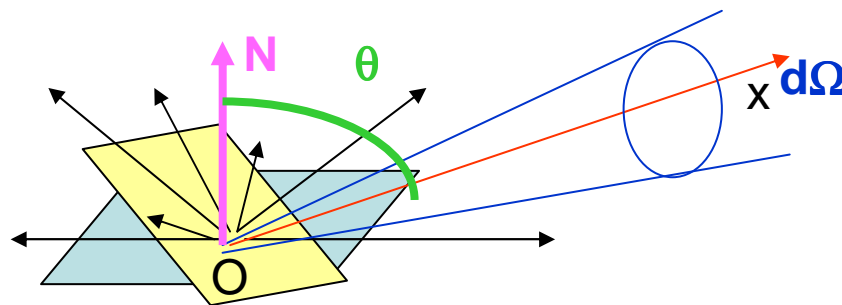
- ⇒ flux total émis par unité de surface de la source dans un demi-hémisphère
- ⇒ permet de comparer les sources entre-elles d'étendues différentes



$$M = \frac{d\Phi}{dS} \equiv \phi_{\text{émis}}$$

Luminance totale L_{Ox} dans une direction Ox [$\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$]

- ⇒ intensité dans la direction Ox (I_{Ox}) divisée par la surface apparente de la source dans cette même direction
- ⇒ permet de comparer la puissance rayonnée dans une direction Ox par des sources d'étendues différentes ou d'orientations différentes
- ⇒ permet de comparer la puissance rayonnée par une même source dans différentes directions



$$L_{Ox} = \frac{I_{Ox}}{dS'} = \frac{I_{Ox}}{dS \cdot \cos \theta} = \frac{d^2\Phi_{Ox}}{d\Omega \cdot dS \cdot \cos \theta}$$

Le flux émis par un élément de surface dS dans un angle solide $d\Omega$ entourant une direction Ox inclinée de d'un angle θ / à la normale à dS est

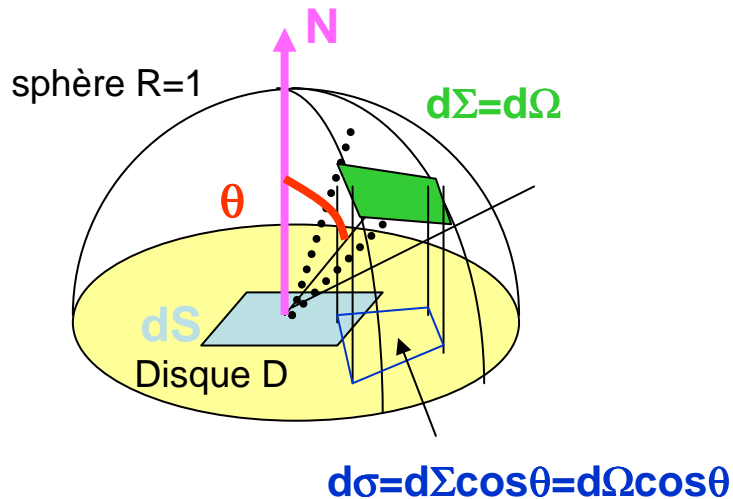
$$d^2\Phi_{Ox} = L_{Ox} d\Omega \cdot dS \cdot \cos \theta$$

Loi de Lambert

- ⇒ loi de Lambert = source dont L_{Ox} indépendante de $Ox \rightarrow L_{Ox} = L = \text{constante}$
- ⇒ source Lambertienne = source isotrope (ou diffuse)

$$L_{Ox} = L = \frac{I_{Ox}}{dS \cdot \cos \theta} = \frac{I_{On}}{dS \cdot \cos \theta} \Rightarrow I_{Ox} = I_{On} \cos \theta$$

Loi de Lambert – relation entre M et L



$$d^2\Phi_{Ox} = L_{Ox} d\Omega \cdot dS \cdot \cos \theta$$

$$d\Phi = \int_{\Omega} L_{Ox} d\Omega \cdot dS \cdot \cos \theta = L \cdot dS \cdot \int_{\Omega} d\Omega \cdot \cos \theta$$

$$d\Phi = L \cdot dS \cdot \int_{\text{disque D}} d\sigma = L \cdot dS \cdot \pi$$

$$d\Phi = \pi L dS \rightarrow M = \frac{d\Phi}{dS} = \pi L$$

TRANSFERTS THERMIQUES

III- Rayonnement

III.D.- Caractérisation des récepteurs de rayonnement

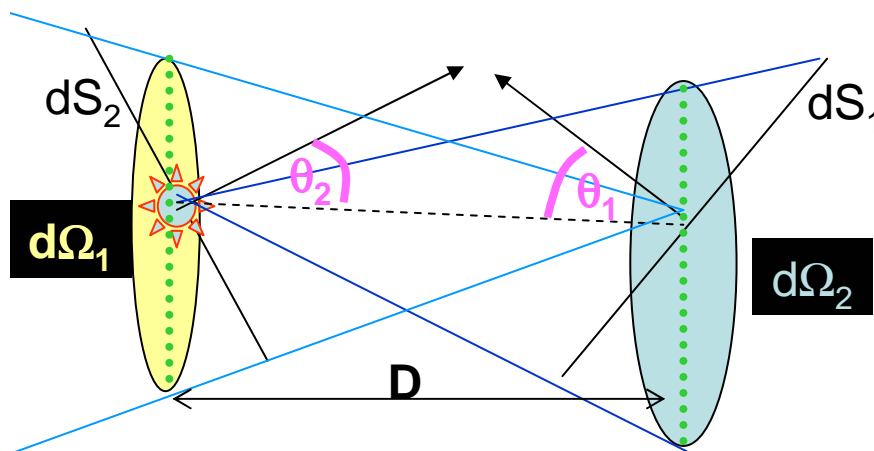
- ⇒ flux, intensité, luminance → concepts valides et inchangés
- ⇒ émittance M → éclairement E

Éclairement d'un récepteur E [W.m^{-2}]

⇒ flux reçu par unité de surface réceptrice en provenance de l'ensemble des directions d'où elle peut recevoir du rayonnement

$$E = \frac{d\Phi}{dS} \equiv \varphi_{\text{reçu}}$$

Relation entre éclairement du récepteur et luminance de la source



$$d^2\Phi_2 = L_2 d\Omega_2 \cdot dS_2 \cdot \cos \theta_2$$

$$d\Omega_2 = \frac{dS_1 \cdot \cos \theta_1}{D^2}$$

$$d^2\Phi_2 = L_2 \frac{dS_1 \cdot \cos \theta_1}{D^2} dS_2 \cdot \cos \theta_2$$

$$E = \frac{d\Phi_2}{dS_1} = L_2 \frac{dS_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{D^2}$$

TRANSFERTS THERMIQUES

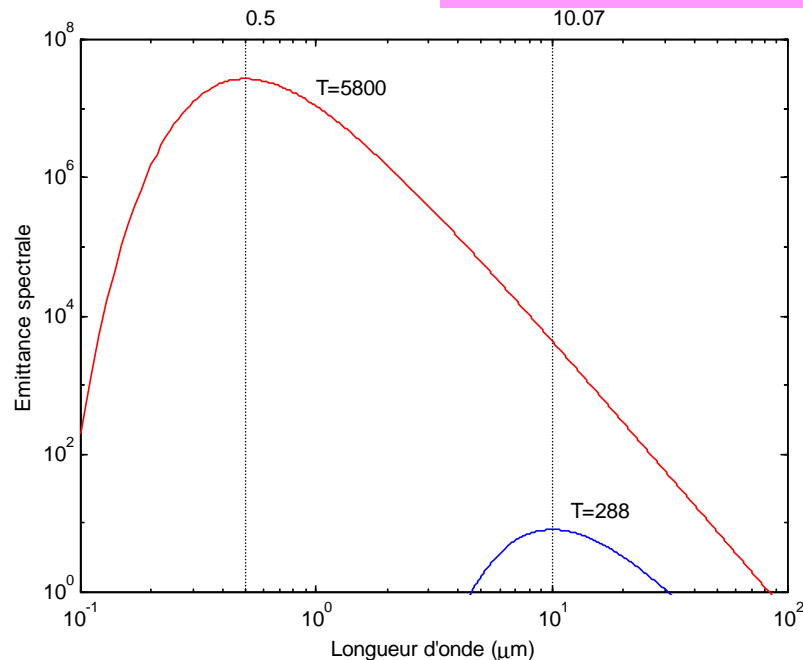
III- Rayonnement

III.E.- Thermodynamique du rayonnement

Un corps qui absorbe intégralement le rayonnement qu'il reçoit est un **corps noir**. La formulation de l'**exitance spectrale** (ou **émittance spectrale**) du corps noir $M^0(\lambda, T)$ est issue de la **loi de Planck** (luminance énergétique spectrale) :

$$M^0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1 \right]}$$
$$M^0(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]}$$

[W m⁻² μm⁻¹]
avec λ = longueur d'onde [μm]
 T = température absolue [K]
 h = constante de Planck ($6,625 \times 10^{-34}$ W s²)
 c = vitesse de la lumière dans le vide (3×10^8 m s⁻¹)
 k = constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23}$ J K⁻¹)
 $C_1 = 3,741.108$ Wμm⁴m⁻²
 $C_2 = 14388$ μm.K



Loi du déplacement de Wien

Pour une température donnée, l'exitance spectrale d'un corps noir varie avec la longueur d'onde → il existe un λ_{\max} correspondant à la valeur maximale de $M(\lambda, T)$

$$\frac{dM^0(\lambda, T)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_{\max} T = 2,897 \times 10^{-3} \text{ mK}$$

pour le soleil, $T = 5800$ K → $\lambda_{\max} = 499$ nm (visible)
pour la Terre, $T = 288$ K → $\lambda_{\max} = 10$ μm (infrarouge)

Le soleil émet donc dans un domaine de longueurs d'ondes différent de celui de la Terre → on peut traiter ces deux domaines indépendamment (notamment pour la partition de l'énergie solaire à la surface du sol).

Loi de Stefan-Boltzmann

La puissance totale rayonnée par unité de surface du corps noir, appelée **exitance totale**, est calculée en intégrant la formule de Planck sur l'hémisphère et sur toutes les longueurs d'onde :

$$M^0(T) = \iint_{\Omega, \lambda} M^0(T, \lambda) d\Omega d\lambda = \sigma T^4 \quad [\text{W m}^{-2}]$$

avec σ_{SB} = constante de Stefan-Boltzmann ($5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$).

Corps gris

Un corps noir est un corps idéal. Dans la nature et à température égale, la plupart des surfaces émettent moins qu'un corps noir : $M(T) = \varepsilon \sigma T^4$ avec $0 < \varepsilon < 1$

➤ ε = émissivité du corps

➤ $\varepsilon = M(T)_{\text{gris}} / M^0(T)_{\text{noir}}$

➤ on parle de corps gris lorsque ε est indépendant de la longueur d'onde $\varepsilon_\lambda = \varepsilon / \varepsilon_{\text{Ox}, \lambda} = \varepsilon_{\text{Ox}}$

➤ on parle de corps diffusant si $\varepsilon_{\text{Ox}} = \varepsilon / \varepsilon_{\text{Ox}, \lambda} = \varepsilon_\lambda$

➤ corps gris et diffusant $\varepsilon_{\text{Ox}, \lambda} = \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{M(T)}{M^0(T)} \rightarrow M(T) = \varepsilon \cdot M^0(T) \rightarrow M(T) = \varepsilon \cdot \sigma T^4$$

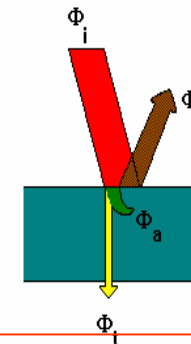
densité de flux de rayonnement émis [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$]
 $\equiv \phi$

TRANSFERTS THERMIQUES

III- Rayonnement

III.E.- Interaction avec la matière

- ⇒ Φ_i = flux total incident
- ⇒ Φ_a = flux total absorbé
- ⇒ Φ_r = flux total réfléchi
- ⇒ Φ_t = flux total transmis
- ⇒ absorptance $\alpha = \Phi_a / \Phi_i$
- ⇒ réflectance $\rho = \Phi_r / \Phi_i$
- ⇒ transmittance $\tau = \Phi_t / \Phi_i$



Conservation de l'énergie → $\Phi_i = \Phi_a + \Phi_r + \Phi_t \Rightarrow 1 = \alpha + \rho + \tau$

Si les propriétés optiques d'un matériau dépend de la longueur d'onde, on peut découper le domaine de longueur d'onde pour obtenir des propriétés constantes sur un domaine (cas de la vitre ci-contre)

⇒ IR [3-10 μm] : $\alpha = 0,65$ $\rho = 0,30$ $\tau = 0,05$ (→ serres)

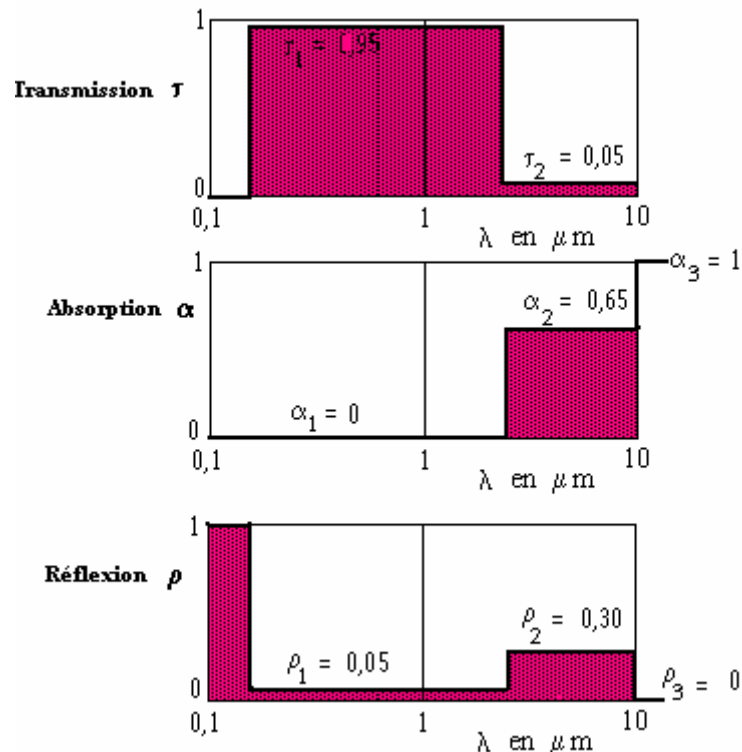
$$1 = \alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda$$

Lois de Kirchoff :

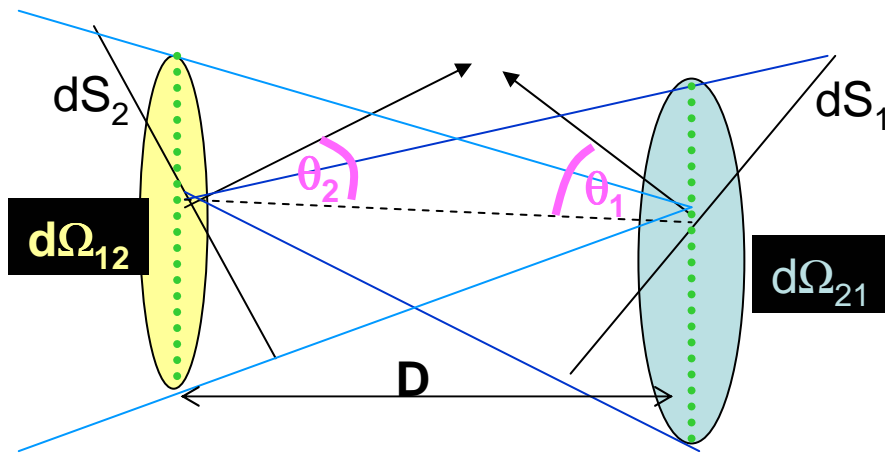
∀ Le corps $\varepsilon_{Ox,\lambda} = \alpha_{Ox,\lambda}$ et $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$

Corps gris : $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$ et $\alpha_\lambda = \alpha \rightarrow \varepsilon = \alpha$

Corps noir : $\varepsilon_\lambda = \varepsilon = \alpha = 1$



Échanges radiatifs entre deux surfaces assimilées à des corps noirs



Flux total émis par $S_1 \rightarrow \Phi_1 = M_1^0 S_1$
 Seule une fraction atteint $S_2 \rightarrow \Phi_{12} = F_{12} \Phi_1$

Flux total émis par $S_2 \rightarrow \Phi_2 = M_2^0 S_2$
 Seule une fraction atteint $S_1 \rightarrow \Phi_{21} = F_{21} \Phi_2$

F_{ij} = facteur de forme géométrique

Flux émis par dS_1 en direction de dS_2

$$F_{ij} = \frac{1}{S_i} \iint_{S_i, S_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi D^2} dS_j \cdot dS_i$$

Théorème de réciprocité : $S_i F_{ij} = S_j F_{ji}$

$$d^2 \Phi_{12} = L_1 d\Omega_{12} dS_1 \cdot \cos \theta_1 = \frac{M_1^0}{\pi} \frac{dS_2 \cdot \cos \theta_2}{D^2} dS_1 \cdot \cos \theta_1$$

$$\Phi_{12} = M_1^0 S_1 \frac{1}{S_1} \iint_{S_1, S_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi D^2} dS_2 \cdot dS_1 = M_1^0 S_1 F_{12}$$

$$\Phi_{12} = M_1^0 S_1 F_{12} = M_1^0 S_2 F_{21}$$

$$\Phi_{21} = M_2^0 S_2 F_{21} = M_2^0 S_1 F_{12}$$

Flux net échangé

Pour S_1 , pertes+gains $\rightarrow \Phi_{1net} = \Phi_{12} - \Phi_{21} = M_1^0 S_1 F_{12} - M_2^0 S_2 F_{21} = S_1 F_{12} (M_1^0 - M_2^0) = S_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$

Pour S_2 , pertes+gains $\rightarrow \Phi_{2net} = \Phi_{21} - \Phi_{12} = M_2^0 S_2 F_{21} - M_1^0 S_1 F_{12} = S_2 F_{21} (M_2^0 - M_1^0) = S_2 F_{21} (T_2^4 - T_1^4)$

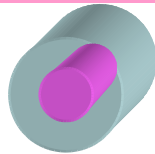
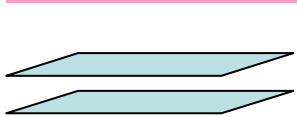
$$\Phi_{\text{échangé}} = \Phi_{1net} = -\Phi_{2net} = S_i F_{ij} (T_i^4 - T_j^4) = S_j F_{ji} (T_i^4 - T_j^4) \quad T_i > T_j \rightarrow \Phi_{\text{échangé}} > 0 \rightarrow S_1 \text{ perd de l'énergie}$$

réciprocité $S_i F_{ij} = S_j F_{ji}$

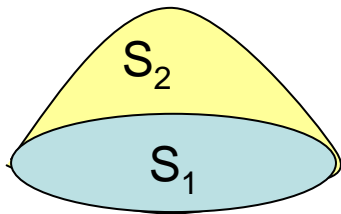
additivité $\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$

F_{ii} : échange de S_i avec elle-même \rightarrow surfaces concaves

Facteurs de forme évidents



le flux émis par l'un est totalement absorbé par l'autre $\rightarrow F_{12}=F_{21}=1$

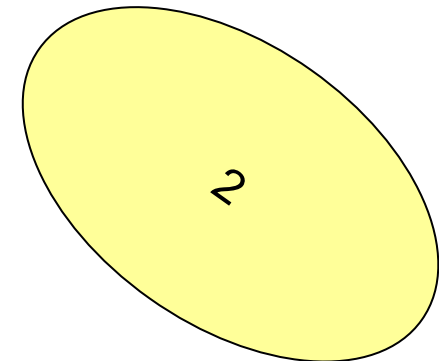


le flux émis par S_1 est totalement absorbé par $S_2 \rightarrow F_{12}=1$
 S_2 surface concave $\rightarrow S_1 F_{12} = S_2 F_{21} \rightarrow F_{21} = S_1/S_2 \rightarrow F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - S_1/S_2$

Échange de rayonnement entre **deux surfaces grises**

Milieu 1 : S_1, ϵ_1

Milieu 2 : S_2, ϵ_2



- ➡ beaucoup plus complexe \rightarrow notion de radiosité
- ➡ on se limite à présenter quelques cas utiles

$$\phi_{12net} = S_1 \bar{F}_{12} (M_1^0 - M_2^0) = \sigma S_1 \bar{F}_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\bar{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} \cdot \frac{S_1}{S_2}}$$

Facteur de forme gris entre S_1 et S_2

↻ dépend de la géométrie

↻ **dépend des propriétés radiatives des surfaces**

Cas d'une surface convexe S_1 totalement entourée d'une surface concave S_2

S_1 ne peut rayonner sur elle-même → $F_{11}=0$ donc $F_{12}=1$ (additivité)

$$\bar{F}_{12} = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \cdot \frac{S_1}{S_2} \right]^{-1}$$

Cas d'une surface convexe S_1 totalement entourée d'une surface concave S_2 , $S_2 \gg S_1$

$$\bar{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}} = \varepsilon_1$$

$$\phi_{1net} = -\phi_{2net} = \sigma \varepsilon_1 S_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

Cas d'une surface convexe S_1 placée à l'intérieur d'une enceinte noire ($\varepsilon_2=1$)

$$\bar{F}_{12} = \varepsilon_1$$

$$\phi_{1net} = -\phi_{2net} = \sigma \varepsilon_1 S_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

Cas de 2 surfaces // à distance faible / à leurs dimensions

$F_{12}=1$ et $S_1 \approx S_2$

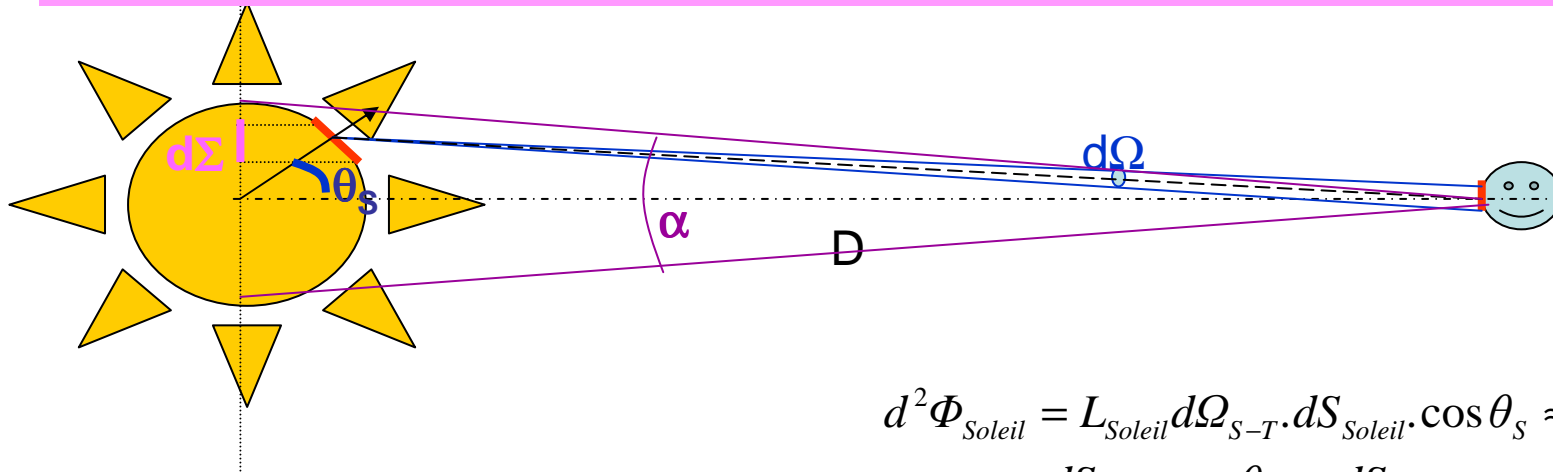
$$\bar{F}_{12} = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right]^{-1}$$

TRANSFERTS THERMIQUES

III- Rayonnement

III.F.- Eclairement reçu sur Terre – bilan radiatif

Par définition, la **constante solaire** S_0 est la densité de flux d'énergie (ou puissance) totale rayonnée par le Soleil par unité de surface normale aux rayons solaires au sommet de l'atmosphère.



Soleil = corps noir à $T=5800$ K
 $D=149.637.000$ km
 $R_{\text{Soleil}}=696.700$ km
 $\sigma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

$$d^2\Phi_{\text{Soleil}} = L_{\text{Soleil}} d\Omega_{S-T} \cdot dS_{\text{Soleil}} \cdot \cos\theta_s \approx L_{\text{Soleil}} d\Omega_{S-T} \cdot d\Sigma$$

$$d\Omega_{S-T} = \frac{dS_{\text{Terre}} \cdot \cos\theta_T}{D^2} \approx \frac{dS_{\text{Terre}}}{D^2}$$

$$d^2\Phi_{\text{Soleil}} = \frac{\sigma T_{\text{Soleil}}^4}{\pi} \frac{dS_{\text{Terre}}}{D^2} d\Sigma$$

$$E = \frac{d\Phi_{\text{Soleil}}}{dS_{\text{Terre}}} = \int_{\Sigma} \frac{\sigma T_{\text{Soleil}}^4}{\pi} \frac{1}{D^2} d\Sigma = \sigma T_{\text{Soleil}}^4 \frac{\pi R_{\text{Soleil}}^2}{\pi D^2} = \sigma T_{\text{Soleil}}^4 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} \approx \sigma T_{\text{Soleil}}^4 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2$$

α : diamètre apparent du soleil
($\alpha_{\text{moyen}} = 1923''$)

$$S_0 = 1393,4 \text{ W m}^{-2} \approx 1400 \text{ W m}^{-2}$$

S_0 varie en fonction:

- ➔ distance Terre/Soleil (max au solstice d'hiver, mini au solstice d'été)
- ➔ de l'activité du Soleil (cycle de 11 ans)
- ➔ on définit une constante solaire moyenne $E_0 = 1353 \text{ W.m}^{-2}$

$$E(Doy) = E_0 (1 + 0.033 \cos(0,984.Doy)) \quad \text{Doy} = \text{Day of the Year}$$

Effets de l'atmosphère

Le rayonnement électromagnétique est perturbé par deux processus :

- ➔ **absorption** par certains gaz atmosphériques (loi de Beer-Lambert) → vibrations, rotations
- ➔ **diffusion** par les molécules et les aérosols (Rayleigh, Mie, non-sélective)

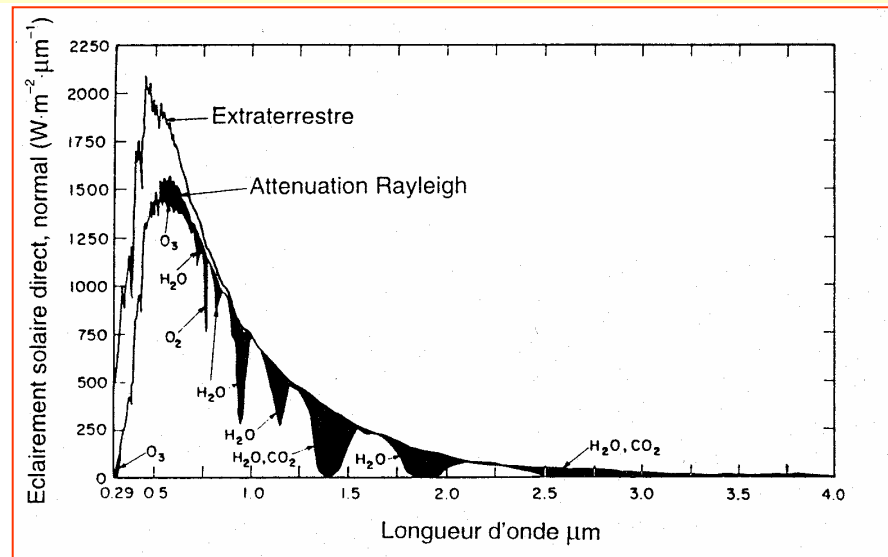
Le phénomène de diffusion est d'autant plus important que la longueur d'onde est petite.

↳ l'**ozone** (O_3) présente une très forte absorption des UV (néfaste aux êtres vivants).

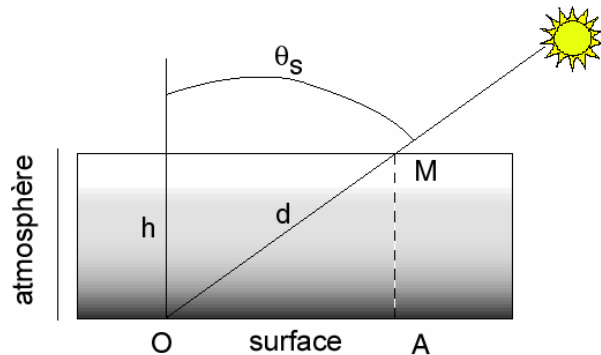
↳ l'**oxygène** (O_2) et le **dioxyde de carbone** (CO_2) sont uniformément mélangés dans l'atmosphère et en quantité constante. La contribution de O_2 est très forte autour de $0,7 \mu m$. Celle du CO_2 a lieu au delà de $1 \mu m$ et surtout dans l'infrarouge thermique où le CO_2 joue un rôle déterminant dans l'effet de serre.

↳ la **vapeur d'eau** (H_2O), dont la quantité varie fortement d'un endroit à l'autre et d'un moment à l'autre de l'année. Elle présente plusieurs bandes d'absorption importantes aux longueurs d'onde supérieures à $0,7 \mu m$. En particulier elle absorbe une bonne partie du rayonnement infrarouge de grandes longueurs d'onde émis par la Terre.

↳ d'autres gaz comme le CH_4 , CO , N_2O , CFC possèdent des bandes d'absorption dans l'infrarouge thermique. Moins abondants que la vapeur d'eau ou le dioxyde de carbone, ces constituants ont un pouvoir de piégeage du rayonnement des centaines ou des milliers de fois supérieur



Notion de "Air Mass"



h : épaisseur de l'atmosphère à la verticale d'un lieu

θ_s : hauteur du Soleil

d : distance parcourue par les rayons lumineux dans l'atmosphère (ou air mass)

$$d = \frac{h}{\cos \theta_s} = \frac{1}{\cos \theta_s}$$

\Rightarrow spectre $AM\ d$

en posant par convention $h = 1$.

Par convention, on nomme le spectre solaire hors atmosphère **AM0**.

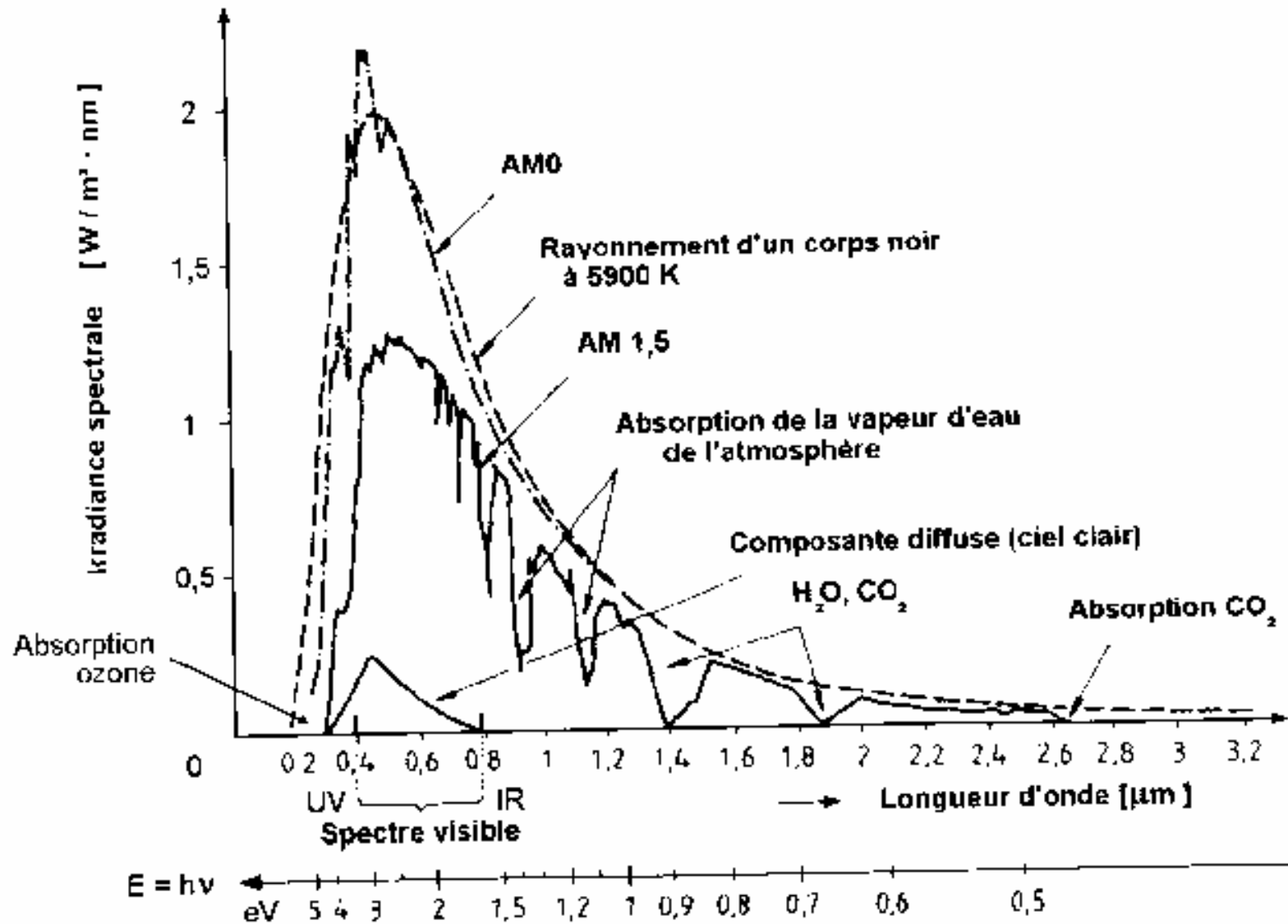
Quant $d=1$, l'allure du spectre est noté **AM1** (soleil au zénith au niveau de la mer)

↪ La distance réellement parcourue est de 7,8 km – épaisseur standard moyenne)

Le spectre **AM2** (soleil à 60° , typique de nos latitudes) et **très** utilisés en Europe.

AM1.5 (soleil à 48°) qui sert de référence pour la mesure de cellules photovoltaïques (avec une puissance incidente de **$1000\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$** et une température de 25°C (conditions dites **STC**) \rightarrow sauf indication contraire, c'est pour de telles conditions que doivent être fournies les performances et spécifications d'un dispositif photovoltaïque donné.

Spectres AM0 et AM1.5



Rayonnements à la surface terrestre

Les divers rayonnements à la surface du sol

⇒ rayonnement direct+diffusé incident de courte longueur d'onde (visible) = R_g

⇒ partie réfléchi par le sol $R_v \uparrow = \alpha R_g$

⇒ rayonnement thermique (grande longueur d'onde) de l'atmosphère $R_a = \sigma T_A^4$ car l'atmosphère peut être considérée comme un corps noir de température apparente T_A . Les basses couches participent fortement à ce rayonnement, et on a des formules empiriques qui permettent de relier R_a à des mesures de température et d'humidité de l'air à 2 m à partir des profils verticaux de température et d'humidité obtenus par radiosondages. En raison de la forte contribution des basses couches, plusieurs formules simplifiées faisant intervenir la température et la pression de vapeur saturante mesurées à 2 m ont été proposées pour des ciels clairs :

$$R_a = 1,24 \left(\frac{e_a}{T_a} \right)^{1/7} \sigma T_a^4 \quad \text{avec } T_a \text{ la température de l'air [K] et } e_a \text{ la tension de vapeur d'eau [hPa]}$$

⇒ rayonnement thermique de la Terre (grande longueur d'onde) $R_{ir} \uparrow$. La Terre se comporte comme un corps gris d'émissivité ε_s , telle que

$$R_{ir} \uparrow = (1 - \varepsilon_s) R_a + \varepsilon_s \sigma T_s^4 \quad (\text{non absorption+émission})$$

Bilan radiatif au sol : le rayonnement net

$$R_{net} = R_g - \alpha R_g + R_a - (1 - \varepsilon) R_a - \varepsilon_s \sigma T_s^4 \approx (1 - \alpha) R_g + \varepsilon \sigma (T_A^4 - T_s^4)$$

Cette énergie est alors convertie en :

⇒ flux de conduction dans le sol $G (= -\lambda \text{grad} T)$

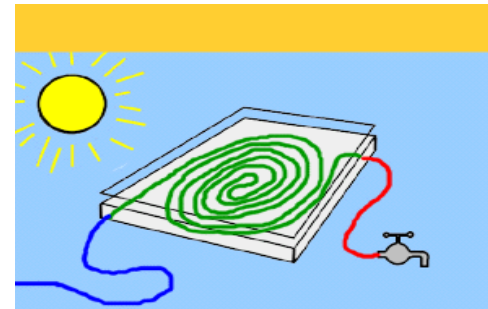
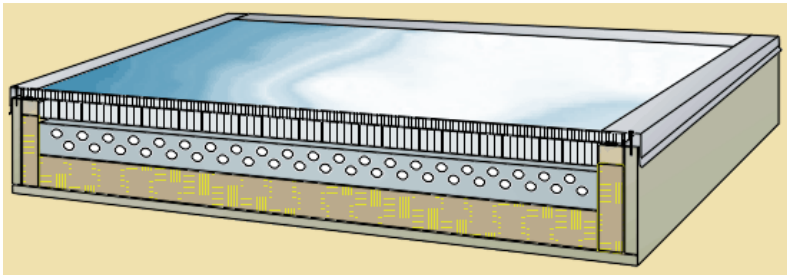
⇒ flux de convection dans l'air $H (= \rho K_H \partial T / \partial z)$

⇒ flux d'évaporation (ou condensation) de l'humidité (sol/atmosphère) $L_v E (= \rho K_Q \partial q / \partial z)$

TRANSFERTS THERMIQUES

III- Rayonnement

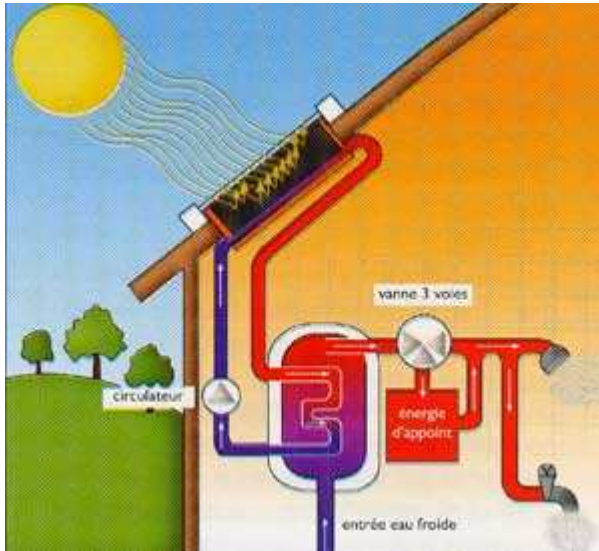
III.G.- Exemple d'application : le capteur plan solaire



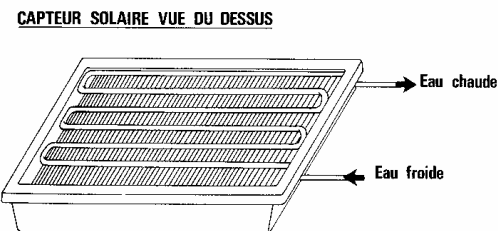
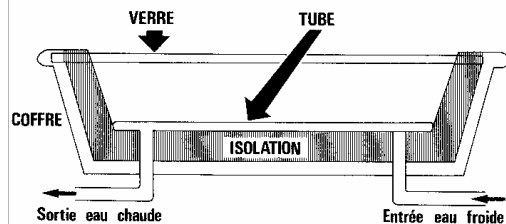
Un capteur plan est constitué de plusieurs éléments :

- un serpentin dans lequel circule de l'eau (celle à chauffer)
 - on maximise la surface du tuyau susceptible d'échanger de la chaleur
 - on choisit un matériaux bon conducteur thermique (cuivre)
- une plaque dans laquelle est encapsulé le serpentin
 - ◆peinte en noir sur le dessus
 - pour absorber au maximum le rayonnement incident
 - éviter les pertes par réflexion.
 - ◆réfléchissante sur sa face opposée (feuille d'aluminium)
 - limitation du rayonnement IR dans toutes les directions
- une autre plaque thermiquement isolante sous la première (et résistante à haute température).
- une vitre de protection, mais pas seulement...

But : chauffer de l'eau à l'aide du rayonnement solaire

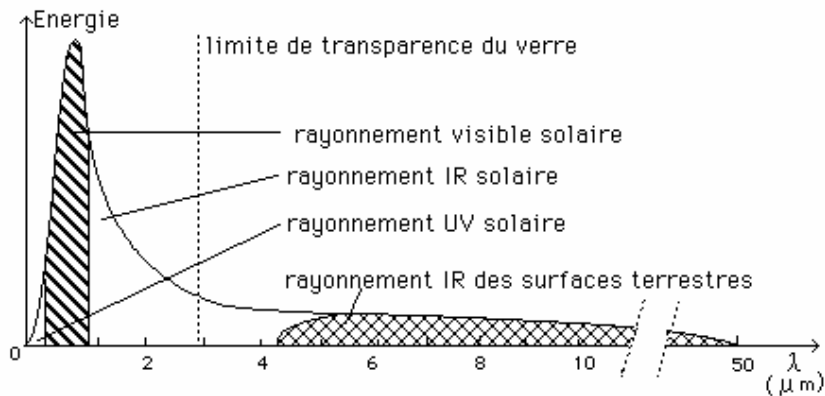


Capteur solaire thermique plan : Coffre rigide et vitré à l'intérieur duquel une plaque et des tubes métalliques noirs (absorbeur) reçoivent le rayonnement solaire et chauffent un liquide caloporteur (antigel). Certains capteurs peuvent être "intégrés" ou "incorporés" en toiture (ils assurent alors également une fonction de couverture du bâtiment \Rightarrow démarche HQE).



Piscine chauffée à Laval (53)

Rôle principale de la vitre = effet de serre



Le verre est transparent pour $\lambda < 3 \mu\text{m}$, avec un faible coefficient de réflexion ($\rho=10\%$), et très absorbant pour $\lambda > 3.5 \mu\text{m}$. Le rayonnement solaire traverse la vitre, alors que le rayonnement IR issu de la plaque ne la traverse pas.

La plaque et la vitre peuvent être séparées par de l'air, le vitrage peut être multiple, et avoir subi différents traitements. La vitre permet également de limiter les pertes par convection forcée du vent. De fait, la vitre absorbe le rayonnement IR de la plaque, qu'elle réemet à 50% sous forme radiative vers l'atmosphère, mais également 50% vers la plaque → effet de serre

À l'équilibre thermodynamique

