

Chapitre 5

Dynamique de la rotation et applications élémentaires à la Terre

Dans ce chapitre, nous appliquons les théorèmes décrits dans le précédent chapitre à un objet en mouvement autour d'un point fixe. Nous esquissons la physique de la précession en faisant la relation entre le mouvement du gyroscope et le mouvement de l'axe de rotation de la Terre. Ensuite, nous exprimons les lois de la dynamique dans un repère non-Galiléen comme la Terre et nous terminons par trois conséquences de la rotation auxquelles on se trouve souvent confronté dans les Géosciences : la variation de la gravité avec la latitude, la déviation vers l'est et la rotation du plan d'oscillation du pendule.

5.1 Dynamique de la rotation d'un solide autour d'un point fixe

5.1.1 Préliminaires : retour sur la relation de Chasles-Euler

Considérons (Figure 5.1) un solide en mouvement autour d'un point fixe O. Le mouvement est rapporté à un référentiel Galiléen Oxyz. Soit $\vec{\omega}$ le vecteur instantané de rotation. Soit OXYZ un repère orthonormé lié au solide. Nous ferons en outre l'hypothèse que OXYZ est un repère judicieusement choisi, c'est à dire un repère principal d'inertie. La matrice d'inertie est alors diagonale. Soient \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z les vecteurs unitaires de ce repère.

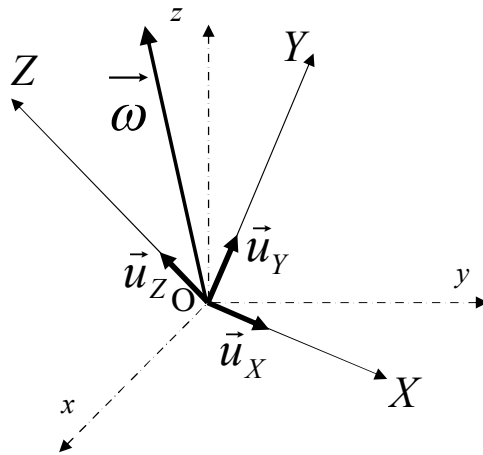


Figure 5.1. Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

La relation de Chasles-Euler s'applique à tous les points du solide mais aussi à tous les points du repère OXYZ qui est lié au solide, et donc aux points extrémités des vecteurs unitaires. Ainsi les dérivées par rapport au temps des vecteurs unitaires peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_x}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_x \\ \frac{d\vec{u}_y}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_y \\ \frac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_z \end{cases} \quad (5.1)$$

Nous aurons besoin, pour le moment cinétique du solide d'une relation qu'on peut montrer de façon générale. Soit donc \vec{A} un vecteur quelconque dépendant du temps et soient A_X, A_Y et A_Z ses coordonnées dans le repère OXYZ. On a :

$$\vec{A} = A_X \vec{u}_X + A_Y \vec{u}_Y + A_Z \vec{u}_Z . \quad (5.2)$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \dot{A}_X \vec{u}_X + A_X \frac{d}{dt} \vec{u}_X + \dot{A}_Y \vec{u}_Y + A_Y \frac{d}{dt} \vec{u}_Y + \dot{A}_Z \vec{u}_Z + A_Z \frac{d}{dt} \vec{u}_Z \quad (5.3)$$

soit, en utilisant les relations (5.1) :

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \dot{A}_X \vec{u}_X + \dot{A}_Y \vec{u}_Y + \dot{A}_Z \vec{u}_Z + A_X \vec{\omega} \times \vec{u}_X + A_Y \vec{\omega} \times \vec{u}_Y + A_Z \vec{\omega} \times \vec{u}_Z \quad (5.4)$$

On obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \times \vec{A} , \quad (5.5)$$

où on a posé :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_R = \dot{A}_X \vec{u}_X + \dot{A}_Y \vec{u}_Y + \dot{A}_Z \vec{u}_Z . \quad (5.6)$$

Cette dernière quantité peut s'interpréter comme la vitesse relative de variation de \vec{A} dans le repère mobile OXYZ. Ses composantes sont tout simplement les dérivées par rapport au temps des composantes.

On peut aussi faire apparaître les composantes des vecteurs dans la relation (5.5) qui devient :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{A}_X \\ \dot{A}_Y \\ \dot{A}_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{pmatrix} , \quad (5.7)$$

où $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ désignent les composantes de $\vec{\omega}$ dans le repère mobile OXYZ.

Cette relation signifie que, dans un repère en rotation, les composantes de la dérivée d'un vecteur par rapport au temps ne sont pas simplement égales aux dérivées des composantes de ce vecteur. Il y a des termes supplémentaires fournies par le produit vectoriel $\vec{\omega} \times \vec{A}$.

5.1.2 Les équations d'Euler

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème du moment cinétique par rapport au point fixe O. Soit $\vec{\Gamma}_O$ le moment de toutes les forces appliquées au solide. Dans le cas d'un solide plongé dans un champ de gravité uniforme, nous avons vu plus haut que c'est le moment du poids total appliqué au centre d'inertie. On a alors :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_O = \vec{\Gamma}_O . \quad (5.8)$$

D'après la relation (5.7) ci-dessus, on a :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \sigma_{OX} \\ \sigma_{OY} \\ \sigma_{OZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{OX} \\ \dot{\sigma}_{OY} \\ \dot{\sigma}_{OZ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_{OX} \\ \sigma_{OY} \\ \sigma_{OZ} \end{pmatrix} , \quad (5.9)$$

Cependant, comme on l'a vu au chapitre 3, il existe une relation simple entre le moment cinétique et le vecteur rotation dans le repère principal OXYZ :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{OX} \\ \sigma_{OY} \\ \sigma_{OZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega_X \\ B\omega_Y \\ C\omega_Z \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

On a donc, en remplaçant dans (5.9) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \sigma_{OX} \\ \sigma_{OY} \\ \sigma_{OZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\dot{\omega}_X \\ B\dot{\omega}_Y \\ C\dot{\omega}_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A\omega_X \\ B\omega_Y \\ C\omega_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{OX} \\ \Gamma_{OY} \\ \Gamma_{OZ} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

où Γ_{OX} , Γ_{OY} , Γ_{OZ} désignent les composantes du moment total des forces dans le repère mobile.

On obtient donc les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_X + (C-B)\omega_Y\omega_Z = \Gamma_{OX} \\ B\dot{\omega}_Y + (A-C)\omega_Z\omega_X = \Gamma_{OY} \\ C\dot{\omega}_Z + (B-A)\omega_X\omega_Y = \Gamma_{OZ} \end{cases} \quad (5.12)$$

qu'on préfère toutefois présenter sous la forme suivante :

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_X = (B-C)\omega_Y\omega_Z + \Gamma_{OX} \\ B\dot{\omega}_Y = (C-A)\omega_Z\omega_X + \Gamma_{OY} \\ C\dot{\omega}_Z = (A-B)\omega_X\omega_Y + \Gamma_{OZ} \end{cases} \quad (5.13)$$

Ce sont les équations d'Euler. Elles définissent l'évolution temporelle du vecteur rotation d'un solide soumis à des forces extérieures. Il est facile de s'en souvenir. Dans la première ligne, les moments d'inertie principaux A , B et C apparaissent dans l'ordre, ainsi que les composantes du vecteur rotation. Les autres composantes s'obtiennent alors par permutations circulaires.

Il n'est en général pas simple de résoudre ce système d'équations différentielles couplées. Il existe cependant un cas simple, le cas d'une toupie symétrique ($A=B$) quand le moment des forces extérieures est nul. On dit alors qu'on a une toupie libre. On peut alors résoudre simplement les équations d'Euler, comme le mirent en évidence Euler puis Poinsot.

5.2 La toupie symétrique libre : Le problème d'Euler et Poinsot¹

Dans le cas de la toupie symétrique libre, les équations d'Euler s'écrivent :

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_X = (A-C)\omega_Y\omega_Z \\ A\dot{\omega}_Y = (C-A)\omega_Z\omega_X \\ C\dot{\omega}_Z = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

La troisième équation nous indique que la composante ω_Z est constante dans le temps. Posons alors :

$$\Omega = \frac{C-A}{A}\omega_Z \quad (5.15)$$

qui donc est une constante.

Les deux autres équations peuvent alors s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_X = -\Omega\omega_Y \\ \dot{\omega}_Y = -\Omega\omega_X \end{cases} \quad (5.16)$$

On a alors :

¹ Cette partie 5.2 sur la précession de la toupie libre est donnée pour référence ultérieure. Elle ne figure pas au programme de l'examen en L2.

$$\ddot{\omega}_X = -\Omega\dot{\omega}_Y = -\Omega^2\omega_X \quad (5.17)$$

On connaît les solutions de cette équation, par exemple :

$$\omega_X = \omega_X^0 \cos \Omega t \quad (5.18)$$

et on a alors, d'après (5.16) :

$$\omega_Y = -\frac{1}{\Omega}\dot{\omega}_X = \omega_X^0 \sin \Omega t \quad (5.19)$$

Le vecteur rotation décrit, au cours du temps, dans le plan horizontal OXY, un cercle de rayon ω_X^0 (Figure 5.2). Le rayon de ce cercle est fixé par les conditions initiales. Ce cercle est décrit dans le sens trigonométrique si $C > A$ ($\Omega > 0$) et dans le sens des aiguilles d'une montre si $C < A$ ($\Omega < 0$). Dans le repère OXYZ (Figure 4.13), le vecteur rotation décrit un cône autour de l'axe OZ. On observe donc, dans le repère mobile, un mouvement de précession autour de l'axe de symétrie de la toupie. On appelle ce mouvement apparent dans le repère mobile la précession Eulérienne.

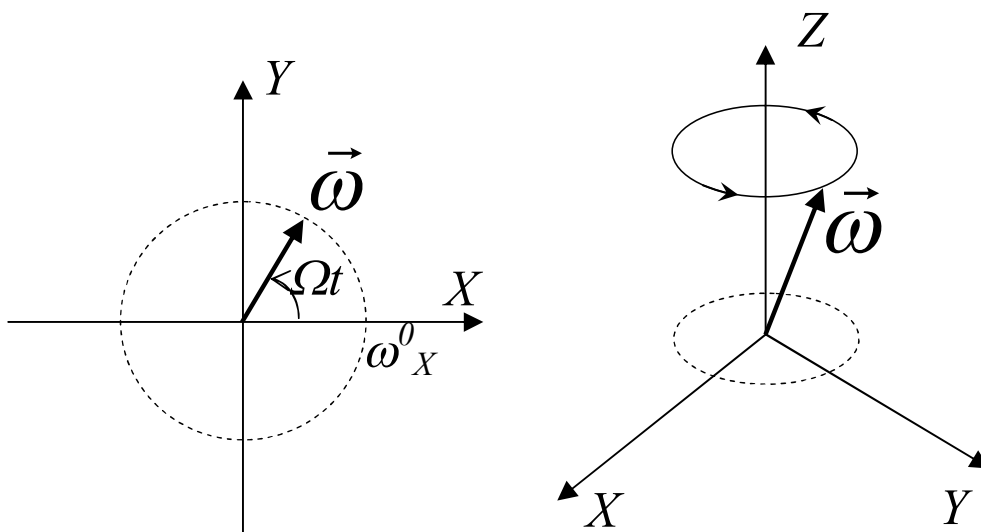


Figure 5.2. La précession Eulérienne de la toupie libre.

Pour la Terre, on a une vitesse angulaire de rotation dont l'amplitude est de un tour par jour. La Terre est légèrement aplatie aux pôles, et on a approximativement :

$$\frac{C - A}{A} \approx \frac{1}{298} . \quad (5.20)$$

ce qui donne, conformément à la relation (5.15), Ω de l'ordre de 1 tour tous les 298 jours.

On observe effectivement que l'axe instantané de rotation de la Terre ne coïncide pas exactement avec son axe principal d'inertie OZ mais fait avec celui-ci un angle d'environ 0.3" d'arc. On s'attend donc à observer une précession Eulérienne, dite aussi polhodie Eulérienne de l'axe de rotation de la Terre, c'est-à-dire que l'axe de rotation tourne autour de l'axe de symétrie dans le sens trigonométrique avec une vitesse angulaire de 1 tour par 298 jours. Si on se plaçait au pôle, l'axe de rotation se situerait à une distance d'environ 10 m et on le verrait tourner autour du pôle avec cette vitesse de rotation (Figure 5.3).

On observe bien un tel mouvement en faisant des visées par rapport aux étoiles (Figure 5.4), mais il est plus complexe qu'une précession régulière. Ce mouvement comprend effectivement un terme périodique, qu'on appelle oscillation de Chandler, dont la période est environ 14 mois mais varie dans le temps. Cette observation remarquable fut effectuée vers 1891 par Seth Carlo Chandler (1846-1913) un astronome amateur de grand talent! On observe aussi d'autres contributions : un mouvement annuel, une dérivée lente continue du pôle vers le Canada et des variations plus irrégulières. Ces mouvements, et en particulier le fait que la

période de Chandler n'est pas 300 jours comme prédit plus haut, intriguèrent longtemps la communauté scientifique et ne furent compris que récemment. Le traitement d'Euler et Poinsot que nous avons évoqué plus haut est trop simpliste. La Terre n'est pas tout à fait une toupie symétrique, elle n'est pas tout à fait rigide. En outre, elle n'est pas isolée dans l'espace. Le moment des forces extérieures n'est pas nul, et nous allons voir dans les paragraphes suivants comment améliorer notre connaissance du mouvement des solides et comment l'appliquer à notre planète Terre, objet particulier de notre attention dans les Géosciences. Commençons par étudier le mouvement du gyroscope autour d'un point fixe.

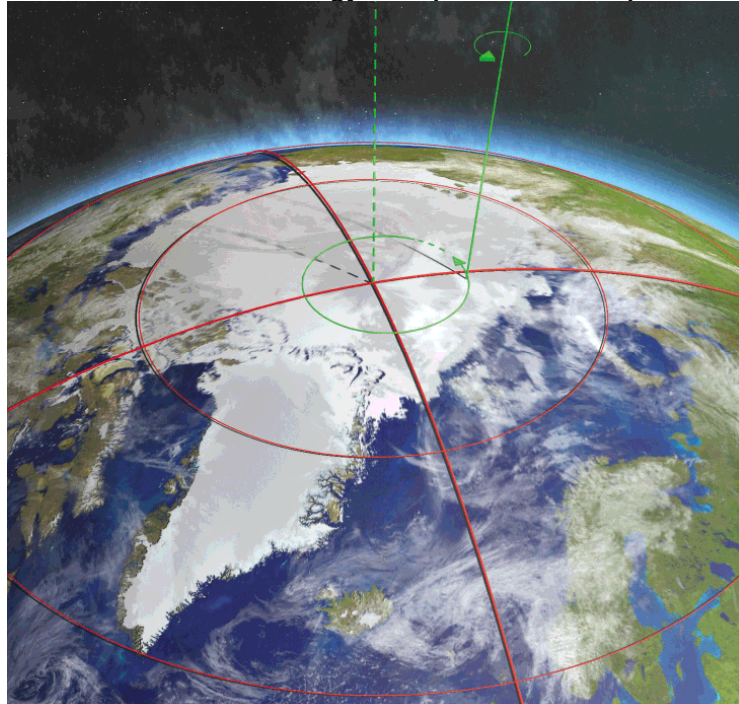


Figure 5.3. Polhodie de l'axe de rotation de la Terre (d'après M. Greff-Lefftz, *Pour la Science*, 2004).

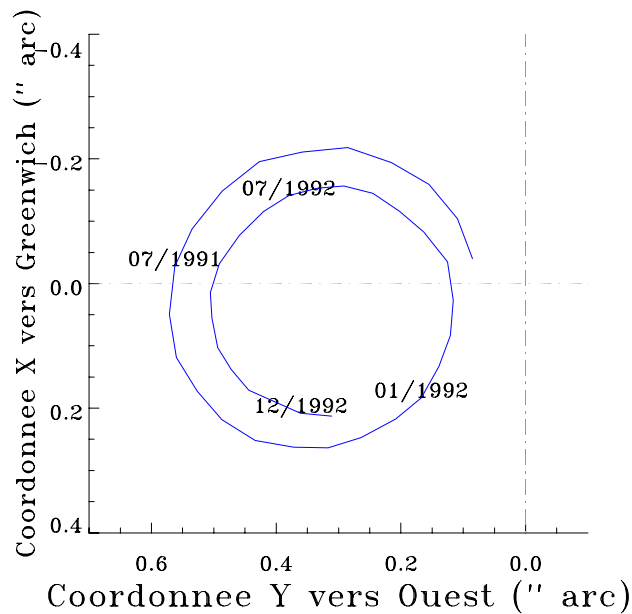


Figure 5.4. Mesures expérimentales de la variation dans le temps de la position de l'axe de rotation de la Terre (*Données IERS, Service International pour la rotation terrestre et les systèmes de référence*).

5.3 La précession de la toupie pesante

5.3.1 Moment des forces appliqués à la toupie pesante

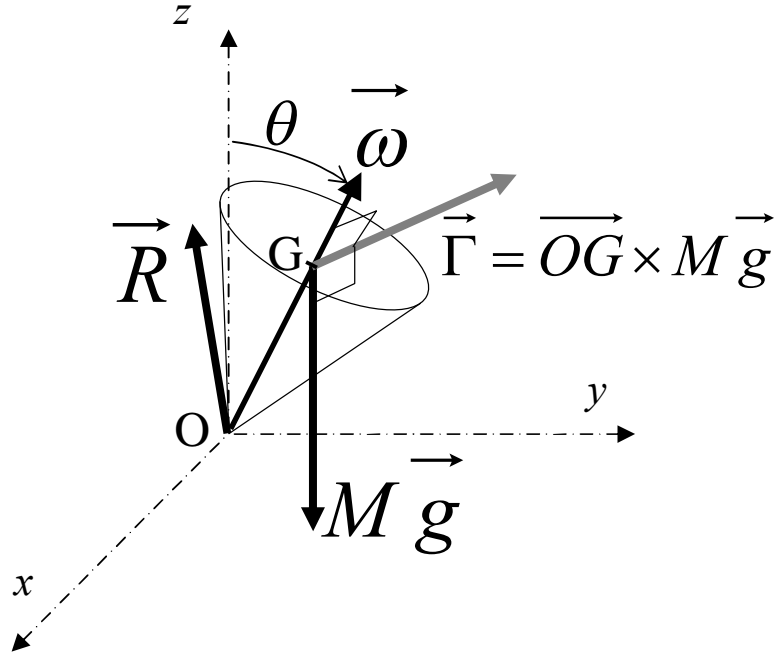


Figure 5.5. Toupie pesante posée sur un point fixe.

Considérons (Figure 5.5) le mouvement d'un gyroscope quelconque autour d'un point fixe O . Soit M sa masse et soit d la distance entre le point O et le centre d'inertie G du gyroscope. Comme précédemment, nous allons écrire le théorème du moment cinétique. Faisons le bilan des forces : il y a les poids de chaque élément du solide et, au point de contact, la réaction \vec{R} du support. Le moment $\vec{\Gamma}_O$ des forces extérieures se limite au moment des poids qui, comme nous l'avons vu au chapitre 4, est le moment par rapport à O du poids total $M\vec{g}$ appliqué au centre d'inertie :

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{OG} \times M\vec{g} . \quad (5.21)$$

Ce vecteur est horizontal, perpendiculaire au plan vertical contenant les points O et G (Figure 5.5), et son amplitude est :

$$\Gamma_O = dMg \sin \theta , \quad (5.22)$$

où θ est, comme dans le chapitre 3, l'angle entre l'axe de symétrie du gyroscope et la verticale. On remarque que le vecteur $\vec{\Gamma}_O$ est aligné avec le vecteur unitaire \vec{u}_ϕ défini au chapitre 3 et donc on peut aussi écrire :

$$\vec{\Gamma}_O = dMg \sin \theta \vec{u}_\phi . \quad (5.23)$$

Les trois composantes du moment des forces dans le repère lié au solide OXYZ peuvent donc être exprimés en fonction des angles d'Euler :

$$\vec{\Gamma}_O = \begin{pmatrix} \Gamma_{Ox} \\ \Gamma_{Oy} \\ \Gamma_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dMg \sin \theta \cos \psi \\ -dMg \sin \theta \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (5.24)$$

Les équations d'Euler (5.13) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x = (B - C)\omega_y\omega_z + dMg \sin \theta \cos \psi \\ B\dot{\omega}_y = (C - A)\omega_z\omega_x - dMg \sin \theta \sin \psi \\ C\dot{\omega}_z = (A - B)\omega_x\omega_y \end{cases} \quad (5.25)$$

avec (voir chapitre 3) :

$$\vec{\omega} = \begin{cases} \omega_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{cases} \quad (5.26)$$

Ces équations sont en général difficiles à résoudre analytiquement. Cependant, pour nos besoins, nous allons considérer maintenant une situation plus particulière, le cas d'une toupie symétrique en rotation propre rapide, pour laquelle une solution simplifiée peut être trouvée.

5.3.2 Précession de la toupie symétrique pesante

Dans le cas de la toupie symétrique, on a $A=B$. La première conséquence est que, d'après (5.25) :

$$C\dot{\omega}_z = 0. \quad (5.27)$$

La composante du vecteur vitesse suivant l'axe de symétrie du gyroscope demeure constante. Si on fait en plus l'hypothèse que le gyroscope est en rotation rapide, et donc que $\dot{\psi}$ est grand devant $\dot{\phi}$, on peut dire que ω_z correspond à la vitesse angulaire de rotation propre. L'amplitude du vecteur moment cinétique est alors $C \omega_z$.

D'autre part, nous admettrons ici qu'on peut aussi montrer que, dans le cas de la toupie symétrique, la nutation est négligeable devant la précession. Or, dans le cas d'un mouvement de précession pure, il est facile d'exprimer directement la valeur de la dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ par rapport au point O.

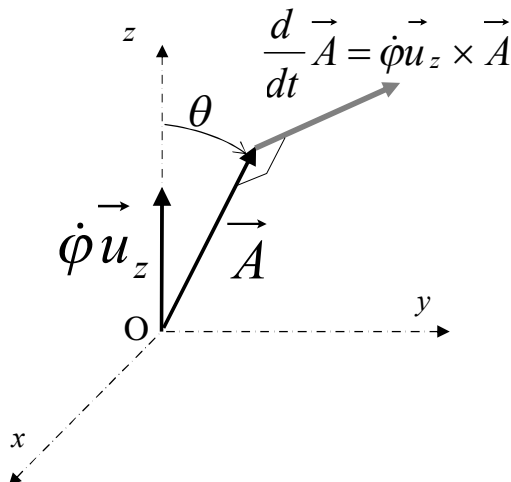


Figure 5.6. Variation dans le temps d'un vecteur en précession autour de l'axe Oz.

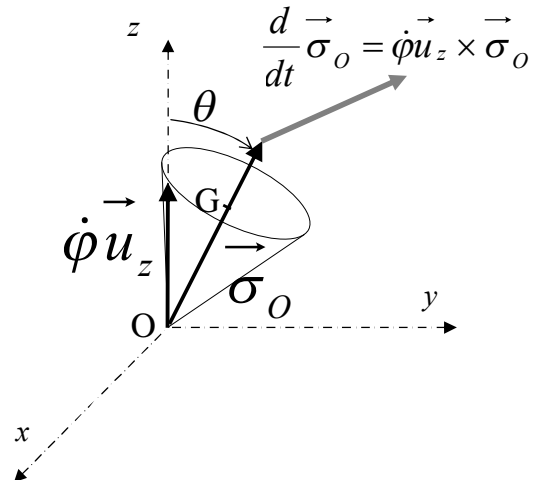


Figure 5.7. Précession du moment cinétique du gyroscope en variation rapide.

Considérons en effet (Figure 5.6) un vecteur \vec{A} quelconque animé d'un vecteur de rotation instantané de précession pure $\dot{\phi}\vec{u}_z$. La relation de Chasles-Euler dit que :

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \dot{\phi} \vec{u}_z \times \vec{A}. \quad (5.28)$$

On voit donc que le vecteur dérivée de \vec{A} par rapport au temps est perpendiculaire au plan vertical contenant \vec{A} , le long du vecteur \vec{u}_ϕ , et son amplitude vaut $\dot{\phi} A \sin \theta$ où A est le module du vecteur \vec{A} et θ l'angle entre \vec{A} et la verticale Oz .

Appliquons ceci au moment cinétique $\vec{\sigma}_O$. Sa dérivée par rapport au temps est donc un vecteur le long de \vec{u}_ϕ et d'amplitude $\dot{\phi} C \omega_z \sin \theta$:

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_O = \dot{\phi} C \omega_z \sin \theta \vec{u}_\phi . \quad (5.29)$$

Mais, d'après le théorème du moment cinétique, cette dérivée est aussi le moment des forces qui, nous l'avons vu plus haut, est aussi le long de \vec{u}_ϕ avec une amplitude $\Gamma_O = dMg \sin \theta$.

On a donc une expression approchée, obtenue en négligeant la nutation, de la vitesse de précession de la toupie symétrique pesante :

$$\dot{\phi} = \frac{Mgd}{C\omega_z} . \quad (5.30)$$

Cette expression indique que quand la rotation propre est positive (rotation dans le sens trigonométrique), la précession est aussi positive. La forme de cette relation est cependant surprenante. On constate en effet que cette vitesse de précession ne dépend pas de l'angle θ et est inversement proportionnelle à la vitesse de rotation propre. On remarque bien expérimentalement que, quand le gyroscope ralentit, sa vitesse de précession augmente !

Maintenant que nous avons élucidé la précession du gyroscope, nous allons nous pencher sur la précession de l'axe de rotation de la Terre.

5.4 Vers une compréhension de la précession des équinoxes

5.4.1 Moment des forces gravitationnelles appliquées à une planète

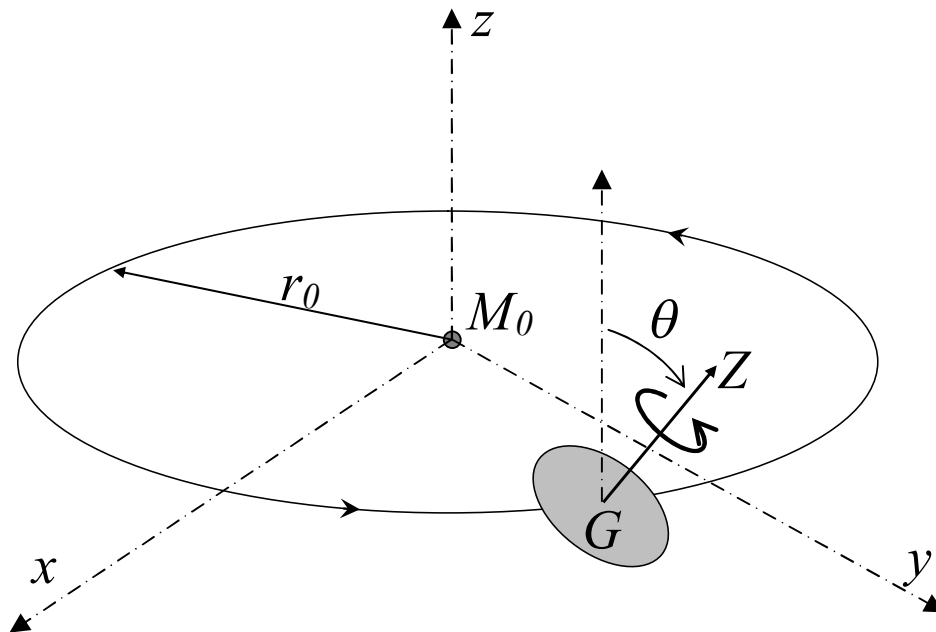


Figure 5.8. Planète ellipsoïdale tournant autour d'un astre éloigné.

Considérons (Figure 5.8) une planète qui subit la force d'attraction gravitationnelle d'un astre que nous supposons ponctuel, de masse M_0 , situé sur une orbite circulaire à une distance r_0 . Nous supposons que la planète n'est pas sphérique mais un ellipsoïde de révolution légèrement aplati dont nous avons exagéré la forme dans la Figure 5.8. Soient A et C les moments d'inertie principaux de cet ellipsoïde. Soit θ l'angle entre l'axe de rotation propre de la planète et la perpendiculaire au plan de l'orbite de la planète autour de l'astre.

On conçoit intuitivement que, à cause de cet aplatissement, l'attraction de l'astre lointain sur les différentes parties de la planète produit un moment non-nul. Les forces d'attraction de l'astre tendent en effet à ramener l'axe de symétrie de la planète perpendiculairement au plan de l'orbite. C'est assez intuitif : les forces d'attraction vont s'exercer plus fortement du côté bombé de la planète du côté de l'astre et ainsi tendre à la faire basculer. Cet effet peut se calculer rigoureusement mais nous nous contenterons ici d'une approximation.

Nous supposons en effet que la période de rotation de la planète autour de l'astre est courte par rapport au mouvement de précession. Dans ce cas, on peut se contenter d'estimer l'effet moyen de l'astre sur la planète en nous plaçant dans le repère barycentrique de la planète (Figure 5.9). Dans ce repère, l'astre lointain décrit une orbite circulaire autour de G et on peut moyenniser l'effet de l'astre sur une rotation complète. On peut alors montrer que le moment moyen $\overline{\Gamma}_G$ des forces d'attraction de l'astre par rapport au centre d'inertie G de la planète s'écrit :

$$\overline{\Gamma}_G = -\frac{3GM_0}{2r_0^3}(C-A)\sin\theta\cos\theta\vec{u}_\varphi. \quad (5.31)$$

Ce moment tend à ramener l'axe GZ parallèlement à l'axe Gz (Figure 5.9). On constate dans la relation (5.31) que, pour une planète sphérique, ($C=A$), alors le moment des forces dû à l'astre lointain est nul.

5.4.2 Expression de la vitesse de précession de l'axe de rotation d'une planète

Si, comme précédemment pour la toupie pesante, nous faisons l'hypothèse d'une rotation propre rapide et que nous négligeons la nutation, nous pouvons, comme précédemment dans le cas de la toupie pesante, appliquer le théorème du moment cinétique en identifiant l'expression (5.31) avec la dérivée par rapport au temps du moment cinétique (5.29). On obtient alors l'expression de la vitesse de précession :

$$\dot{\varphi} = -\frac{3}{2} \frac{GM_0}{r_0^3} \frac{C-A}{C} \frac{\cos\theta}{\omega_z}. \quad (5.32)$$

Le signe moins dans cette relation est bien conforme d'une part à ce qu'on pouvait s'attendre à partir du gyroscope et d'autre part aux observations. Pour la Terre, on a bien une précession des équinoxes rétrograde ! Le gyroscope nous avait donné une piste pour ce signe. En effet, pour le gyroscope (Figure 5.10), la force (son poids) tend à abaisser l'axe de rotation alors que, dans le cas des planètes, l'attraction de l'astre tend à le relever, et donc doit bien produire une précession de signe contraire. Ce qui se passe sur une table avec un gyroscope nous fournit bien un analogue instructif du phénomène planétaire.

On constate aussi en regardant la relation (5.32) que, comme pour le gyroscope, la vitesse de précession est inversement proportionnelle à la vitesse de rotation propre mais que, contrairement au gyroscope, l'angle θ intervient explicitement.

La relation (5.32) permet d'autre part d'aller plus loin. Appliquons-la en effet à la Terre et vérifions si la prédiction fournie par (5.32) fournit un ordre de grandeur correct du phénomène de précession des équinoxes.

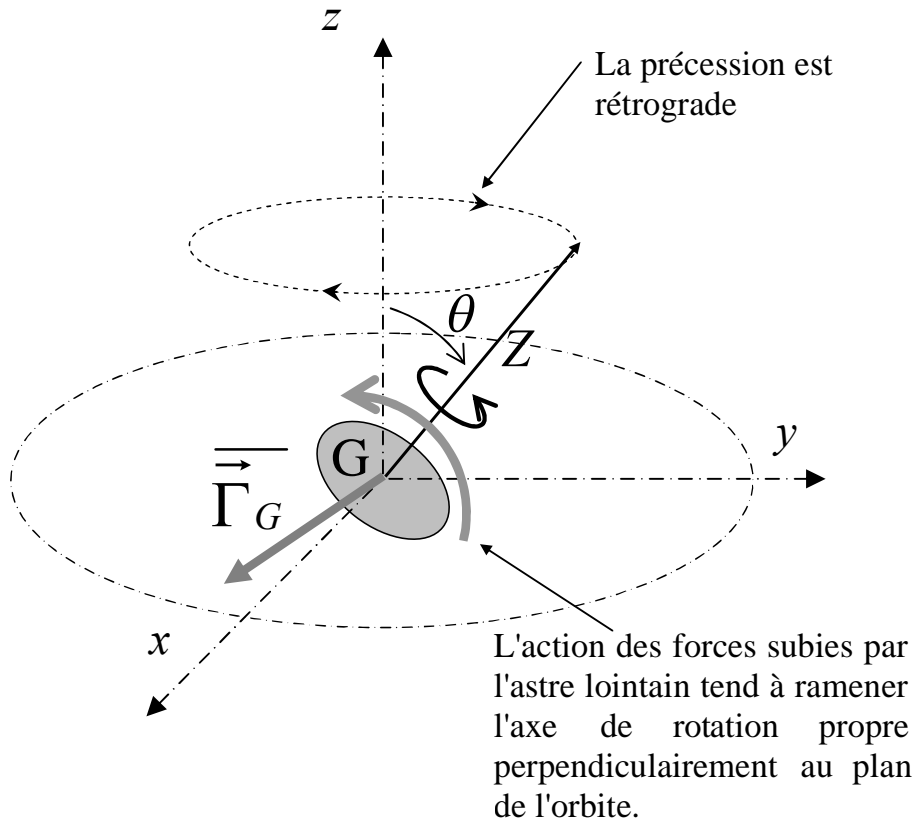


Figure 5.9. Précession de l'axe de rotation d'une planète subissant l'attraction d'un astre.

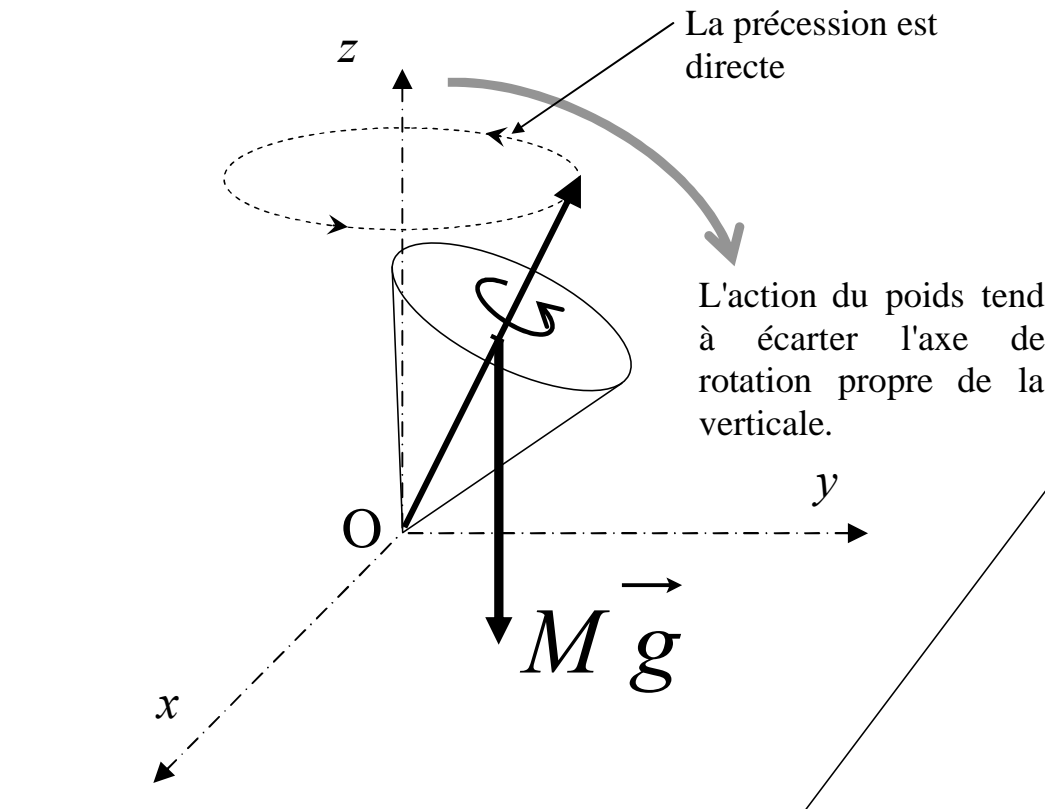


Figure 9.10. Précession de l'axe de rotation de la toupie pesante.

5.4.3 Application à la précession des équinoxes

Cherchons l'ordre de grandeur de la précession de l'axe de rotation de la Terre due au Soleil. On obtient :

$$\dot{\phi} \cong \frac{3 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{2 \cdot (1.5 \cdot 10^{11})^3} \frac{1}{306} \frac{0.92}{\left(\frac{2\pi}{86164}\right)} \cong 2.5 \cdot 10^{-12} s^{-1}, \quad (5.33)$$

ce qui correspond à une période d'environ 80 000 ans.

Cherchons l'effet dû à la Lune. Le rapport de l'effet dû à la Lune à l'effet dû au Soleil, d'après la relation (5.32), sera dans le rapport des masses et l'inverse du rapport des distances à la puissance 3, soit :

$$\frac{M_L}{M_\odot} \left(\frac{1AU}{d_{TL}}\right)^3, \quad (5.34)$$

où M_L est la masse de la Lune, M_\odot la masse du Soleil et d_{TL} la distance Terre-Lune, soit, numériquement :

$$\frac{7.3 \cdot 10^{22}}{2 \cdot 10^{30}} \left(\frac{1.5 \cdot 10^8}{380000}\right)^3 \approx 2. \quad (5.35)$$

L'effet de la Lune sur la précession de l'axe de rotation de la Terre est donc deux fois plus fort que celui du Soleil. La masse de la Lune est faible par rapport à celle du Soleil, mais elle est beaucoup plus proche de la Terre, et comme on le voit dans la relation (5.32), la distance joue avec la puissance 3, c'est la Lune qui domine la précession des équinoxes pour à peu près des deux tiers de l'effet total, le Soleil assurant le troisième tiers.

On peut montrer par des calculs plus poussés que cette analyse est correcte et qu'on sait bien rendre compte de la précession des équinoxes par la mécanique Newtonienne.

Maintenant que nous savons rendre compte des principaux aspects du mouvement de notre gyroscope et faire le lien avec le mouvement de l'axe de rotation de la Terre, nous allons conclure ce chapitre en étudiant quelques mouvements par rapport à la Terre, un autre aspect de la dynamique qui est très utile en sciences de la Terre.

5.5 Dynamique élémentaire dans un repère en rotation

Avant de discuter la dynamique des mouvements par rapport à la Terre, soit par rapport à un objet en rotation, nous allons aborder le cas plus général d'un référentiel accéléré.

5.5.1 Cas général du repère accéléré

Considérons (Figure 5.11) un référentiel CXYZ en mouvement non rectiligne uniforme (non-Galiléen) par rapport à un référentiel Galiléen Oxyz. Soit un point M de masse m subissant une force appliquée \vec{F} . Soient x, y, z les coordonnées de M dans le référentiel Oxyz et X, Y, Z ses coordonnées dans le repère mobile CXYZ. On a donc :

$$\begin{cases} \vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \\ \vec{CM} = X\vec{u}_X + Y\vec{u}_Y + Z\vec{u}_Z \end{cases}, \quad (5.36)$$

où $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ d'une part et $\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z$ d'autre part désignent les vecteurs unitaires de deux référentiels.

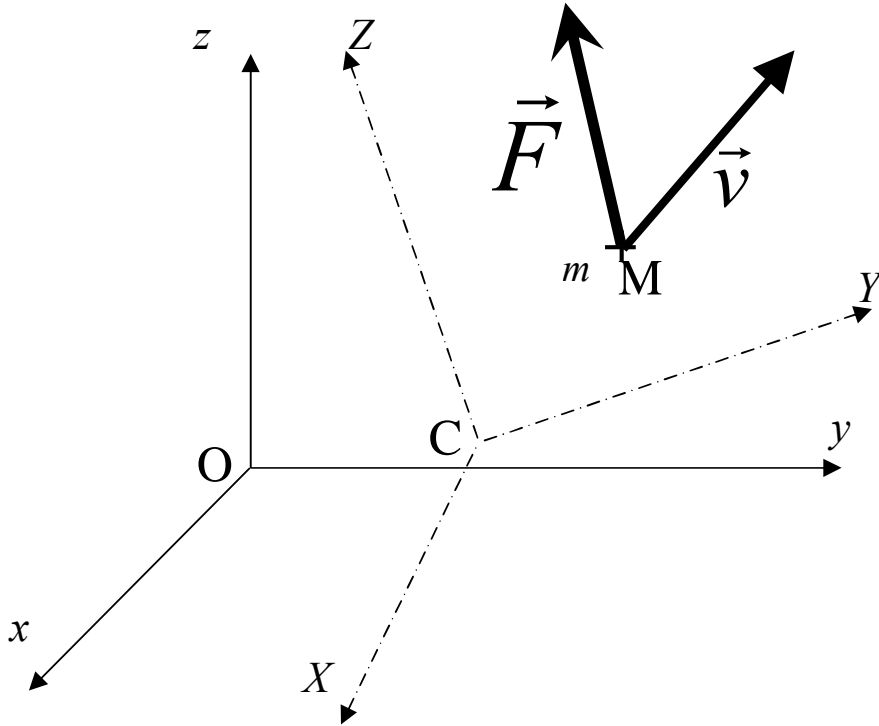


Figure 5.11. Mouvement par rapport à un repère accéléré CXYZ et par rapport à un repère Galiléen Oxyz.

La vitesse et l'accélération de M par rapport au référentiel Galiléen Oxyz seront dites absolues et s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \\ \vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z \end{cases} \quad (5.37)$$

tandis que la vitesse et l'accélération de M par rapport au référentiel accéléré CXYZ, dites relatives, s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{v}_r = \dot{X}\vec{u}_X + \dot{Y}\vec{u}_Y + \dot{Z}\vec{u}_Z \\ \vec{a}_r = \ddot{X}\vec{u}_X + \ddot{Y}\vec{u}_Y + \ddot{Z}\vec{u}_Z \end{cases} \quad (5.38)$$

Le référentiel CXYZ peut être considéré comme un solide. Son mouvement, d'après le théorème de Chasles-Euler, peut donc se décomposer en un mouvement de translation (par exemple le mouvement du point C) et un mouvement de rotation de vecteur instantané $\vec{\Omega}$. On a donc, comme au début de ce chapitre :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_X}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{u}_X \\ \frac{d\vec{u}_Y}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{u}_Y \\ \frac{d\vec{u}_Z}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{u}_Z \end{cases} \quad (5.39)$$

Exprimons la vitesse absolue du point M en faisant apparaître la vitesse relative :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OC} + X\vec{u}_X + Y\vec{u}_Y + Z\vec{u}_Z \quad (5.40)$$

On a donc :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OC} + \dot{X}\vec{u}_x + \dot{Y}\vec{u}_y + \dot{Z}\vec{u}_z + X \frac{d}{dt} \vec{u}_x + Y \frac{d}{dt} \vec{u}_y + Z \frac{d}{dt} \vec{u}_z . \quad (5.41)$$

soit, en utilisant (5.39) :

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM} , \quad (5.42)$$

où \vec{v}_C désigne la vitesse absolue du point C.

Cherchons maintenant l'accélération du point M :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OC} + \ddot{X}\vec{u}_x + \ddot{Y}\vec{u}_y + \ddot{Z}\vec{u}_z + \dot{X} \frac{d}{dt} \vec{u}_x + \dot{Y} \frac{d}{dt} \vec{u}_y + \dot{Z} \frac{d}{dt} \vec{u}_z + \frac{d}{dt} (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM}) \quad (5.43)$$

dont le dernier terme peut se développer :

$$\frac{d}{dt} (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM}) = \dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{CM} + \vec{\Omega} \times \frac{d}{dt} \overrightarrow{CM} = \dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{CM} + \vec{\Omega} \times (\vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM}) \quad (5.44)$$

On obtient donc :

$$\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_r + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{CM} , \quad (5.45)$$

où \vec{a}_C désigne l'accélération absolue du point C.

Ecrivons maintenant la deuxième loi de Newton pour le point M dans le référentiel Oxyz :

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (5.46)$$

où on peut faire apparaître les quantités relatives :

$$m(\vec{a}_C + \vec{a}_r + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{CM}) = \vec{F} , \quad (5.47)$$

qu'on peut écrire :

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_C - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM}) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_r - m\dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{CM} . \quad (5.48)$$

On préfère souvent travailler avec les quantités relatives car elles sont référencées dans le repère mobile où nous nous trouvons, par exemple la Terre. Dans un tel repère, non-Galiléen, on voit qu'on peut encore écrire une deuxième loi de Newton si on tient compte de forces supplémentaires qu'on appellera forces d'inertie :

$$m\vec{a}_C = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_C + \vec{F}_E . \quad (5.49)$$

La première de ces forces, notée \vec{F}_e , est la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_C - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{CM}) . \quad (5.50)$$

La deuxième, notée \vec{F}_C , est la force d'inertie de Coriolis, du nom de l'ingénieur français Gaspard Coriolis (1792-1843) :

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_r . \quad (5.51)$$

La troisième, notée \vec{F}_E , est la force d'inertie d'Euler :

$$\vec{F}_E = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{CM} . \quad (5.52)$$

On constate que cette force n'apparaît que pour des mouvements de rotation non-uniforme (dépendant du temps).

Il y a de nombreuses applications de cette forme développée de la deuxième loi de Newton dans le cas d'un référentiel non-Galiléen. Considérons, comme premier exemple, un mobile de masse m qui glisse sans frottement dans une calotte sphérique en rotation à une vitesse angulaire ω (Figure 5.12). Plaçons-nous dans un repère attaché à la calotte, nous pouvons par exemple imaginer que nous sommes assis quelque part dedans et que nous regardons l'évolution du mobile. Faisons l'inventaire des différentes forces. Il y a d'abord le poids $m\vec{g}$ et la réaction de la calotte qui, en l'absence de frottement, est aligné avec la normale à la surface au point de contact. A ces forces appliquées s'ajoutent les forces

d'inertie, ou pseudoforces. La force d'inertie d'entraînement est horizontale et dirigée vers l'extérieur, on l'appelle habituellement la force d'inertie centrifuge. Son amplitude est, comme nous l'avons indiqué au chapitre 1, $m\Omega^2 r$ où r est la distance entre le mobile et l'axe de rotation. La force d'inertie de Coriolis est perpendiculaire à la vitesse et à l'axe de rotation. Si, comme sur la Figure 5.12, la vitesse relative du mobile par rapport à la calotte est dirigée vers le bas, alors la force de Coriolis est perpendiculaire au plan du dessin et dirigée vers la feuille, opposée au lecteur. Quant à la force d'inertie d'Euler, elle n'existe que si la rotation dépend du temps. Imaginons que la vitesse de rotation est en train d'augmenter ($\dot{\Omega} > 0$). La force d'inertie correspondante est alors perpendiculaire au plan du dessin et dirigée vers le lecteur.

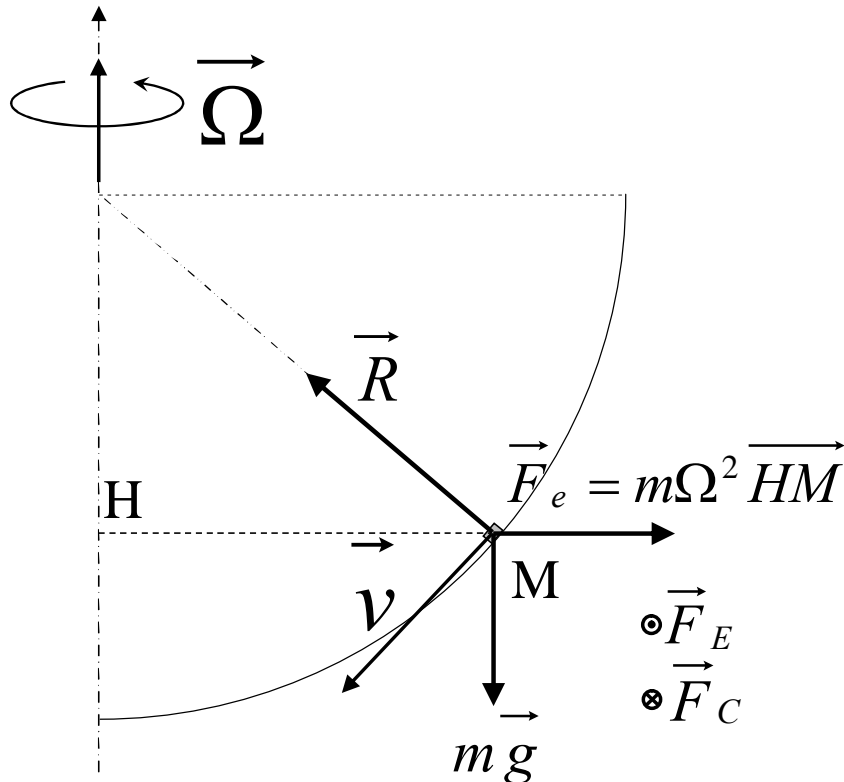


Figure 5.12. Point massif glissant sans frottement sur une sphère en rotation.

Nous verrons de nombreux autres cas en exercice, et on peut d'ailleurs étendre aisément au cas du mouvement d'un solide dans un tel référentiel en mouvement. Dans la suite, nous allons examiner trois applications qui reviennent de façon récurrente dans de nombreuses situations rencontrées en sciences de la Terre.

5.5.2 Rotation de la Terre et force de gravité apparente

Revenons tout d'abord sur le champ de pesanteur à la surface de la Terre. Nous savons que la gravité \vec{g} contribue au poids $m\vec{g}$ d'un corps de masse m . Revenons brièvement sur son origine qui est l'attraction gravitationnelle de tous les points de la Terre.

Pour un objet à symétrie sphérique (Figure 5.13), on peut montrer que l'attraction gravitationnelle à une distance r du centre de la sphère est équivalente à la force d'attraction qu'exercerait une masse ponctuelle située au centre de la sphère et de masse égale à toute la masse contenue dans la sphère de rayon r . Ce théorème a deux conséquences. Premièrement, l'attraction exercée par une distribution de masse à symétrie sphérique quelconque à toute

distance r supérieure à son rayon R est égale à celle exercée par une masse ponctuelle de masse égale à la masse totale de l'objet. Ce théorème permet aussi de trouver la force exercée à l'intérieur de l'objet. Deuxièmement, l'attraction exercée par une distribution de masse à symétrie sphérique dans l'intérieur d'une coquille creuse est nulle.

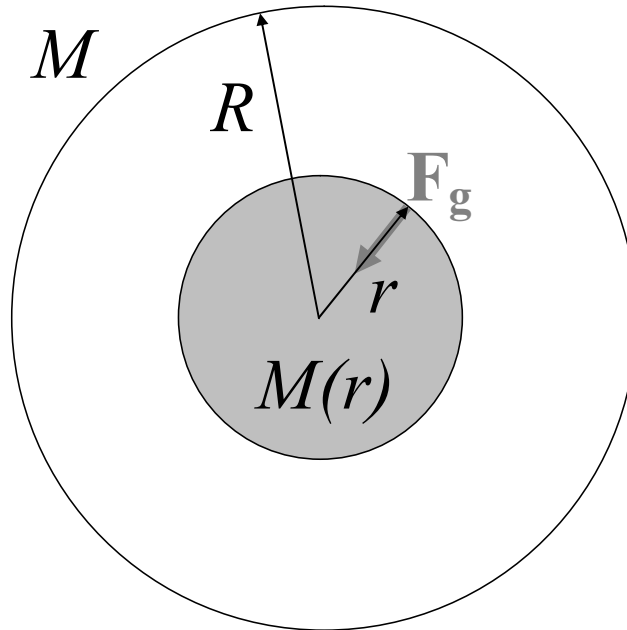


Figure 5.13. Gravitation d'une distribution de matière à symétrie sphérique.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons considérer que la Terre est à symétrie sphérique de rayon R . La force de gravitation exercée sur un objet de masse m à une distance $r > R$ s'écrit donc :

$$\vec{F}_g = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{u}_z, \quad (5.53)$$

où M_T est la masse de la terre et \vec{u}_z la verticale du lieu, qu'on peut écrire :

$$\vec{F}_g = -mg_0 \vec{u}_z, \quad (5.54)$$

avec :

$$g_0 = G \frac{M_T}{R^2}. \quad (5.55)$$

Cette quantité g_0 vaut environ 9.80 m s^{-2} pour $r=6378 \text{ km}$ (rayon équatorial). Si on prend $r=6357 \text{ km}$ (rayon polaire), on obtient $g_0=9.87 \text{ m s}^{-2}$. Remarquons qu'à une altitude de 3000 m , à l'Equateur, par exemple dans les montagnes du Rwanda, la valeur équatoriale devient $g_0=9.79 \text{ m s}^{-2}$. Des valeurs de g_0 , calculées en tenant compte plus précisément de la forme de la Terre, sont montrées en fonction de la latitude dans la Figure 5.14 ; elles sont assez proches des valeurs ci-dessus obtenues en utilisant (5.55). On constate cependant que la variation avec la latitude mesurée expérimentalement est trois fois plus importante que la variation attendue. Un autre phénomène s'ajoute à la variation avec la latitude due à la forme de la Terre, c'est la force centrifuge due à la rotation de la Terre.

La force \vec{F}_g ci-dessus n'est en effet pas le poids $m\vec{g}$ d'un objet, qu'on mesurerait en un lieu de latitude λ , par exemple en suspendant l'objet à un dynamomètre (Figure 5.15). En effet, à la force d'attraction \vec{F}_g s'ajoute la force d'inertie d'entraînement \vec{F}_g' due à la rotation de la Terre :

$$m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_e . \quad (5.56)$$

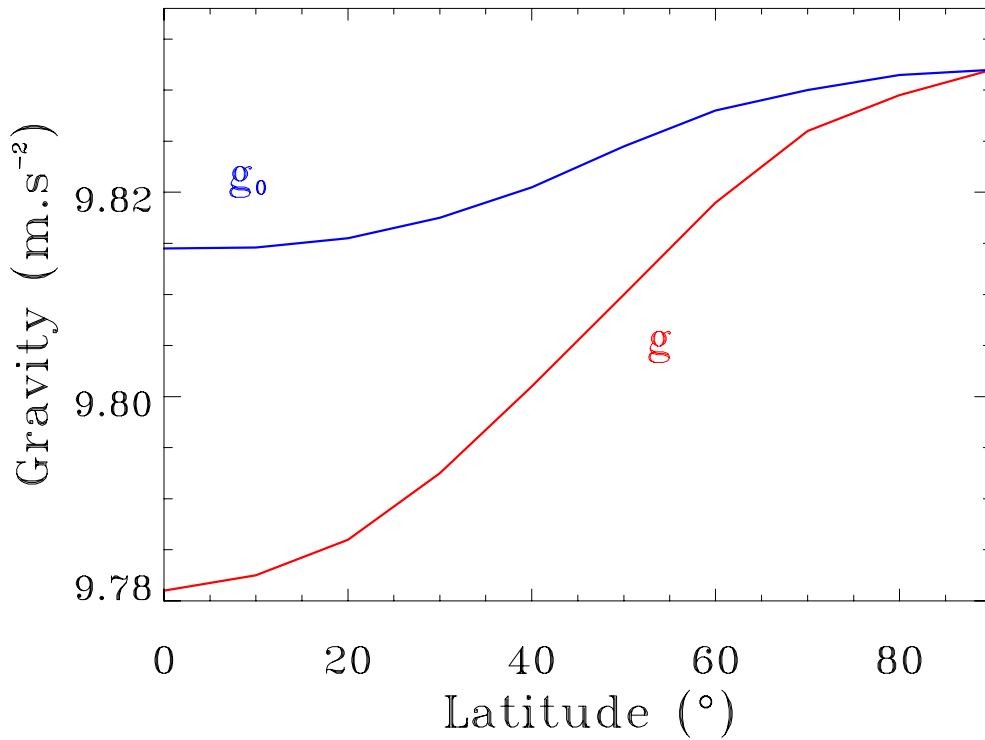


Figure 5.14. Variation de l'accélération de la pesanteur avec la latitude.

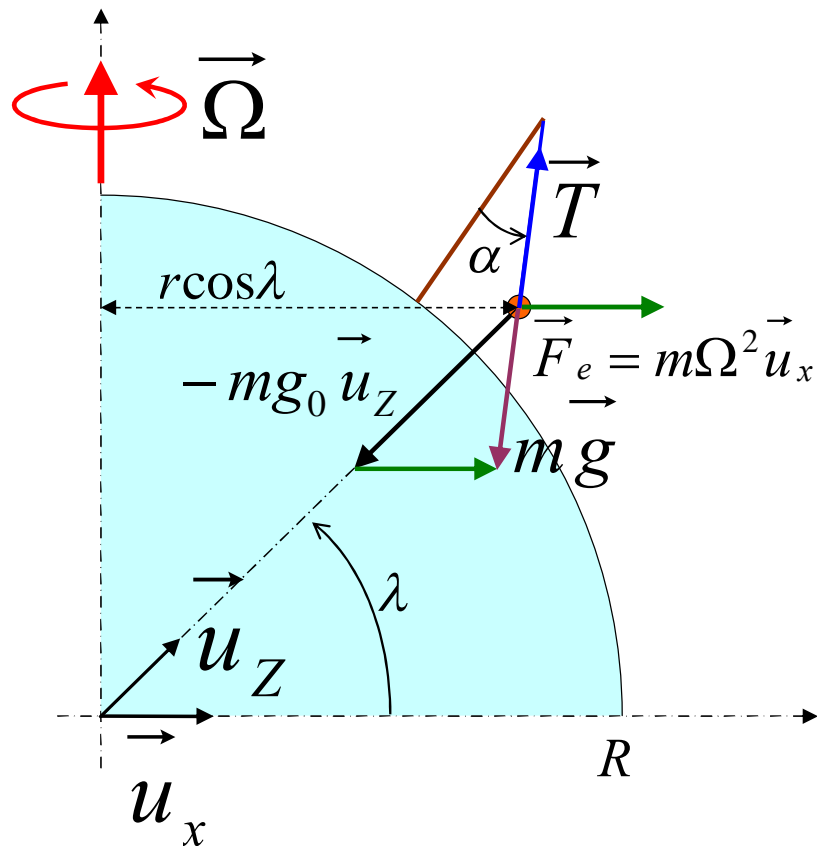


Figure 5.15. Bilan des forces s'appliquant au fil à plomb au repos dans le plan méridien.

Soit Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre. En prenant la période de rotation sidérale $T=86164$ s, la valeur numérique de Ω est $\Omega \cong 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. La force d'inertie d'entraînement est dans le plan équatorial de la Terre, dirigée vers l'extérieur, et son module est :

$$F_e = m\Omega^2 R \cos \lambda . \quad (5.57)$$

L'accélération apparente de la gravité \vec{g} est donc en ce lieu :

$$\vec{g} = -g_0 \vec{u}_z + m\Omega^2 R \cos \lambda \vec{u}_x . \quad (5.58)$$

où \vec{u}_x désigne le vecteur unitaire perpendiculaire à l'axe de rotation dans le plan méridien du lieu. Le module g de \vec{g} est donc :

$$g^2 = g_0^2 + \Omega^4 R^2 \cos^2 \lambda - 2g_0 \Omega^2 R \cos \lambda \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z . \quad (5.59)$$

Comme l'angle entre \vec{u}_x et \vec{u}_z est la latitude λ , on a :

$$g^2 = g_0^2 + \Omega^4 R^2 \cos^2 \lambda - 2g_0 \Omega^2 R \cos^2 \lambda . \quad (5.60)$$

En ne gardant que les termes du premier ordre en Ω^2 , on obtient :

$$g \cong g_0 \sqrt{1 - 2 \frac{\Omega^2 R \cos \lambda}{g_0}} \cong g_0 \left(1 - 2 \frac{\Omega^2 R \cos \lambda}{g_0} \right)^{1/2} \cong g_0 - \Omega^2 R \cos^2 \lambda . \quad (5.61)$$

La variation relative de la gravité δg avec la latitude s'écrit donc approximativement :

$$\delta g \cong -\Omega^2 R \cos^2 \lambda . \quad (5.62)$$

La gravité apparente (et donc le poids d'un objet) diminue donc quand la latitude baisse. Cet effet, dû à la rotation de la Terre, est nul aux pôles ; il est maximal à l'équateur où il vaut :

$$-\Omega^2 R \cong -(7.3 \cdot 10^{-5})^2 6400 \cdot 10^3 \cong -0.034 \text{ m s}^{-2} . \quad (5.63)$$

Cette valeur rend bien compte de l'effet remarqué sur la figure 5.14. Cet effet de réduction de la gravité quand on s'approche de l'équateur fut identifié à l'aide d'un pendule, dès 1671, par Jean Richer (1630-1696) lors d'un voyage en Guyane. Il observa en effet que le pendule battait plus lentement en Guyane qu'à Paris. On voit que deux effets physiques contribuent à ce phénomène : la forme de la Terre d'une part et la force centrifuge due à la rotation d'autre part.

A l'équilibre, le fil à plomb fait un angle α avec la verticale (Figure 5.15). Cet angle peut-être trouvé en écrivant la loi des sinus dans le triangle formé par les trois vecteurs \vec{g} $-g_0 \vec{u}_z$ et $\Omega^2 R \cos \lambda \vec{u}_x$, ce qui donne :

$$\frac{g}{\sin \lambda} = \frac{\Omega^2 R \cos \lambda}{\sin \alpha} \quad (5.64)$$

d'où :

$$\alpha \cong \frac{\Omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda}{g} . \quad (5.65)$$

Un fil à plomb n'indique donc pas rigoureusement la verticale du lieu, mais s'en écarte d'un angle qui vaut au maximum 6' d'arc pour une latitude de 45°. Cet effet est négligeable dans la plupart des applications courantes mais doit être pris en compte pour les visées astronomiques, par exemple celles qu'effectua Chandler à la fin du XIXème siècle.

5.5.3 La déviation vers l'est dans la chute libre

Considérons maintenant la chute libre d'un objet en un point O de latitude λ (Figure 5.16). Considérons le repère tournant OXYZ, l'axe OZ étant la verticale du lieu et OX l'axe du plan méridien pointant vers le pôle sud. L'axe OY est alors tangent au cercle des

longitudes et orienté dans le sens direct. Considérons un mobile de masse m de vitesse \vec{v} et d'accélération \vec{a} .

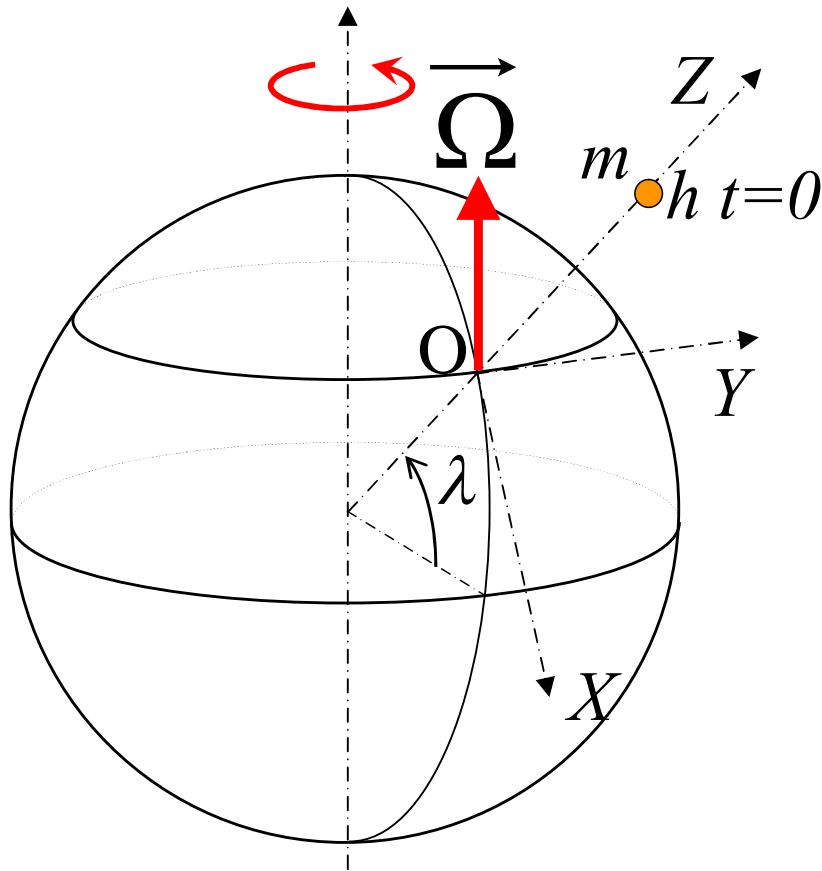


Figure 5.16. Chute libre verticale et rotation de la Terre.

Dans le repère tournant OXYZ, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$m\vec{a} = -mg_0\vec{u}_z - m\vec{a}_c - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overline{CM}) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}. \quad (5.66)$$

La force d'Euler n'est pas prise en compte car on peut considérer que la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même est constante. Nous pouvons regrouper le terme d'entraînement avec le terme de gravitation pure $-mg_0\vec{u}_z$, leur somme étant le poids. Nous avons vu au paragraphe précédent que l'amplitude de cette force est donnée par la masse multipliée par l'accélération locale de la gravité g . Nous avons vu aussi que ce vecteur n'est pas aligné avec la verticale mais que l'écart à la verticale OZ, donné par l'équation (5.65) est petit. Nous négligerons ici cet écart et nous ferons l'hypothèse que le poids au repos demeure aligné avec l'axe OZ. Le terme restant dans la force d'entraînement est alors d'ordre Ω^2 tandis que la force de Coriolis est d'ordre Ω . On peut donc, quand on considère des objets en mouvement, négliger ce deuxième terme de la force d'entraînement devant la force de Coriolis. On a donc finalement :

$$\vec{a} = -g\vec{u}_z - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}. \quad (5.67)$$

Exprimons les composantes de ces différents vecteurs. On a d'abord :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

puis on développe le produit vectoriel :

$$\Omega \times \vec{v} = \begin{vmatrix} -\Omega \cos \lambda & \dot{X} \\ 0 & \dot{Y} \\ \Omega \sin \lambda & \dot{Z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\Omega \sin \lambda \dot{Y} \\ \Omega \sin \lambda \dot{X} + \Omega \cos \lambda \dot{Z} \\ -\Omega \cos \lambda \dot{X} \end{vmatrix} . \quad (5.69)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \ddot{X} = 2\Omega \sin \lambda \dot{Y} \\ \ddot{Y} = -2\Omega \sin \lambda \dot{X} - 2\Omega \cos \lambda \dot{Z} \\ \ddot{Z} = -g + 2\Omega \cos \lambda \dot{Y} \end{cases} . \quad (5.70)$$

Regardons maintenant plus précisément le mouvement de chute libre d'un corps lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur $Z=h$, avec $X=0$ et $Y=0$ à $t=0$, et analysons ce mouvement à l'aide des équations (5.70) ci-dessus. Puisque Ω est une quantité petite devant 1, on peut simplifier ce système en ne gardant que les premiers termes d'ordre Ω . On constate que, si \dot{Y} reste un terme du premier ordre en Ω , \ddot{X} est du deuxième ordre en Ω et on peut donc le négliger : X restera toujours assimilable à 0 pendant ce mouvement. Dans la deuxième équation, on voit alors qu'il ne subsiste que le deuxième terme. Dans la troisième équation, on peut éliminer le deuxième terme qui est d'ordre Ω^2 . Le système s'écrit donc :

$$\begin{cases} \ddot{X} = 0 \\ \ddot{Y} = -2\Omega \cos \lambda \dot{Z} \\ \ddot{Z} = -g \end{cases} . \quad (5.71)$$

Ce système est aisé à résoudre. La troisième équation s'intègre et, avec les conditions initiales mentionnées plus haut, fournit la solution :

$$\dot{Z}(t) = -gt \quad \text{et} \quad Z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 . \quad (5.72)$$

La deuxième équation devient alors :

$$\ddot{Y} = 2\Omega \cos \lambda gt \quad (5.73)$$

dont la solution compatible avec les conditions initiales est :

$$Y(t) = \frac{1}{3}g\Omega \cos \lambda t^3 \quad (5.74)$$

Soit Y_0 l'écart à la verticale observé quand le mobile touche le sol ($Z=0$). On peut tirer l'instant de cet impact en utilisant (5.72) et, en remplaçant dans (5.74), on trouve :

$$Y_0 = \frac{1}{3}g\Omega \cos \lambda \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^3 \quad (5.75)$$

soit :

$$Y_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\Omega \cos \lambda \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}} \quad (5.76)$$

On constate que cet écart Y_0 est positif. Il s'agit d'une déviation vers l'est, dont l'amplitude est maximale à l'équateur. Elle est petite mais mesurable. Pour une hauteur de 100 m, on trouve en effet :

$$Y_0 \cong \frac{2\sqrt{2}}{3}7.3 \cdot 10^{-5} \frac{100^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{10}} \cong 2 \text{ cm} . \quad (5.77)$$

Cet effet est plutôt petit et, s'il avait été prévu par Newton, il ne fut mis en évidence expérimentalement qu'en 1833 par le physicien, géomagnéticien et chimiste allemand Ferdinand Reich (1799-1882).

On constate donc que, dans un système en rotation comme la Terre, les lois de la balistique sont légèrement des lois que nous avons considérées en première approximation au chapitre 1. La force de Coriolis a sur la Terre de nombreux effets plus spectaculaires que cette déviation vers l'est de la chute libre.

5.5.4 La force de Coriolis et la rotation du pendule de Foucault

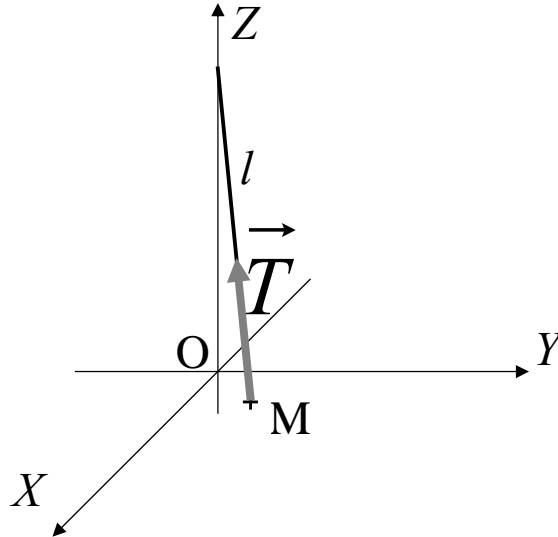


Figure 5.17. Le pendule dans le repère OXYZ.

Considérons (Figure 5.17), dans le même repère OXYZ que précédemment, un pendule simple avec une masse m suspendue à un fil de longueur l . Soit \vec{T} la tension du fil de composantes T_x, T_y et T_z . Les équations du mouvement de notre pendule s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{X} = T_x + 2m\Omega \sin \lambda \dot{Y} \\ m\ddot{Y} = T_y - 2m\Omega \sin \lambda \dot{X} - 2m\Omega \cos \lambda \dot{Z} \\ m\ddot{Z} = T_z - mg + 2m\Omega \cos \lambda \dot{Y} \end{cases} \quad (5.78)$$

Limitons-nous, comme nous l'avons fait jusqu'à présent dans les problèmes de pendule, à des faibles écarts du pendule par rapport à la verticale.

On peut alors considérer que Z demeure proche de 0 et les composantes de la tension du fil peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} T_x \cong -T \frac{X}{l} \\ T_y \cong -T \frac{Y}{l} \\ T_z \cong T \end{cases} \quad (5.79)$$

où T désigne ici module de la tension. En remplaçant dans (5.78), on a :

$$\begin{cases} m\ddot{X} = -T \frac{X}{l} + 2m\Omega \sin \lambda \dot{Y} \\ m\ddot{Y} = -T \frac{Y}{l} - 2m\Omega \sin \lambda \dot{X} \\ 0 = T - mg \end{cases} \quad (5.80)$$

soit :

$$\begin{cases} \ddot{X} = -\frac{g}{l}X + 2\Omega \sin \lambda \dot{Y} \\ \ddot{Y} = -\frac{g}{l}Y - 2\Omega \sin \lambda \dot{X} \end{cases} \quad (5.81)$$

Pour comprendre le contenu physique de ce système d'équations, nous allons nous placer (Figure 5.18) dans un repère $OX'Y'$ qui tourne avec une vitesse angulaire $\omega_0 = \Omega \sin \lambda$.

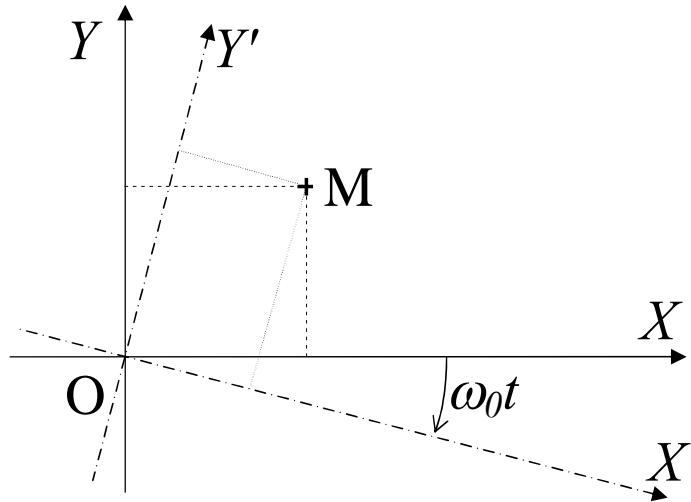


Figure 5.18. Repère tournant dans le plan horizontal.

On a alors :

$$\begin{cases} X = X' \cos \omega_0 t + Y' \sin \omega_0 t \\ Y = -X' \sin \omega_0 t + Y' \cos \omega_0 t \end{cases} \quad (5.82)$$

Les dérivées premières s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{X}' \cos \omega_0 t + \dot{Y}' \sin \omega_0 t - \omega_0 X' \sin \omega_0 t + \omega_0 Y' \cos \omega_0 t \\ \dot{Y} = -\dot{X}' \sin \omega_0 t + \dot{Y}' \cos \omega_0 t - \omega_0 X' \cos \omega_0 t - \omega_0 Y' \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (5.83)$$

Dans les dérivées secondes, on ne conservera que les termes du premier ordre en ω_0 , ce qui donne :

$$\begin{cases} \ddot{X} \cong \ddot{X}' \cos \omega_0 t + \ddot{Y}' \sin \omega_0 t - 2\omega_0 \dot{X}' \sin \omega_0 t + 2\omega_0 \dot{Y}' \cos \omega_0 t \\ \ddot{Y} \cong -\ddot{X}' \sin \omega_0 t + \ddot{Y}' \cos \omega_0 t - 2\omega_0 \dot{X}' \cos \omega_0 t - 2\omega_0 \dot{Y}' \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (5.84)$$

Si on injecte les expressions (5.82) à (5.84) dans (5.81), on obtient le système :

$$\begin{cases} \ddot{X}' = -\frac{g}{l} X' \\ \ddot{Y}' = -\frac{g}{l} Y' \end{cases} \quad (5.85)$$

Dans le repère tournant, la dynamique se limite à une force de rappel de constante g/l . Il s'agit donc d'un mouvement périodique de période $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Si on choisit les conditions initiales telles que $Y'=0$ et $\dot{Y}'=0$, alors le pendule oscillera toujours dans le plan OX' . Dans le repère lié à la Terre, le plan d'oscillation du pendule OX' tourne avec une vitesse angulaire $\Omega \sin \lambda$ (Figure 5.17). Dans l'hémisphère nord, la rotation du plan du pendule s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre (Figure (5.19) et dans le sens trigonométrique dans l'hémisphère sud. On voit que cet effet, contrairement aux deux effets étudiés précédemment,

est maximum aux pôles et nul à l'équateur. Au pôle nord, le plan du pendule tourne avec la vitesse angulaire de rotation de la Terre, il est donc fixe par rapport aux étoiles !

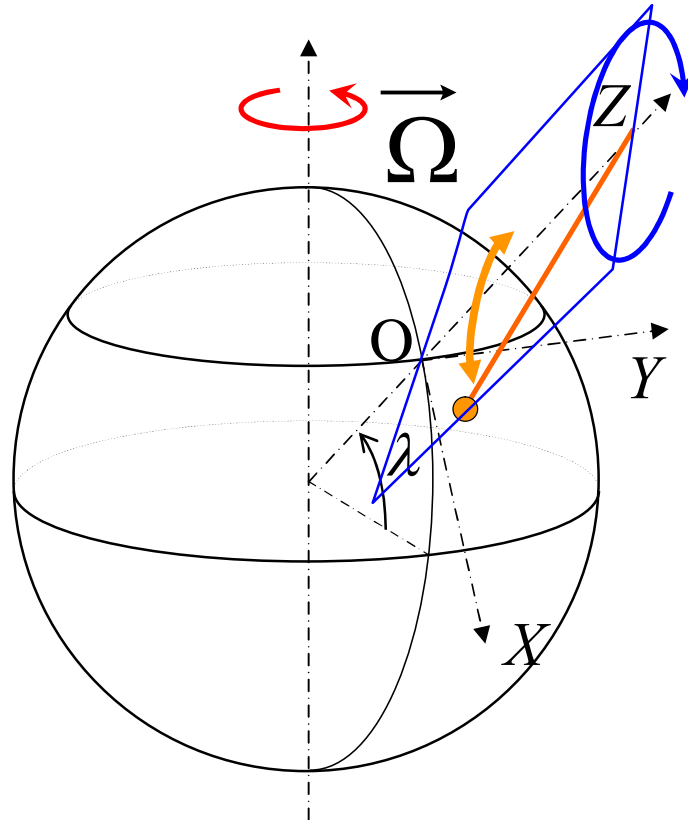


Figure 5.19. Rotation du plan d'oscillation du pendule dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère nord.

Cet effet spectaculaire, qui constitua la première preuve directe de la rotation de la Terre, fut mis en évidence en 1851 par Léon Foucault (1819-1868), avec un pendule long de 67 m installé sous la coupole du Panthéon. A Paris (latitude 49°), le plan du pendule accomplit une rotation complète en 32 heures. Il avance d'environ 0.2° par minute, ce qui est suffisamment rapide pour être observé de façon convaincante en environ une heure avec un long pendule et une expérience soignée, comme les visiteurs peuvent le constater par exemple au Palais de la Découverte.

Ce qu'il faut retenir de ce chapitre :

- Les équations d'Euler
- La précession de la toupie pesante
- L'explication physique de la précession des équinoxes
- Les lois dans un repère en rotation
- L'effet de la rotation sur la gravité de la Terre
- La déviation dans la chute libre
- Le pendule de Foucault