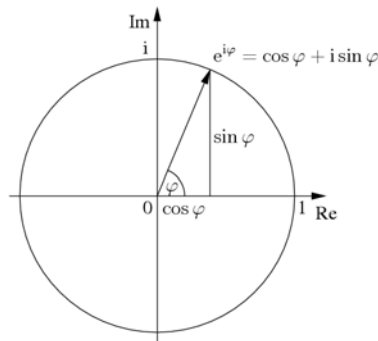


L'analyse (du grec ἀναλύειν) est la branche des mathématiques qui traite des nombres réels, des nombres complexes et de leurs fonctions. Les concepts tels que la dérivation et l'intégration, et par extension la résolution d'équations différentielles, seront abordés durant ce cours dont le but est de donner aux étudiants les outils leur permettant de traiter des problèmes de physique, géophysique, chimie, biologie, etc.

### I. Formules de trigonométrie



- **Théorème de Pythagore** :  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Propriétés liées au cercle trigonométrique :  
Périodicité :  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ,  $\tan(x + \pi) = \tan x$   
Parité :  $\sin(-x) = -\sin x$ ,  $\cos(-x) = \cos x$ ,  $\tan(-x) = -\tan x$   
Symétries et rotations :  
 $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ ,  $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ ,  $\sin(x + \pi) = -\sin x$   
 $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ ,  $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ ,  $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- Formules d'addition et de différence :  
 $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$  et  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$   
 $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  et  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$   
 $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$  et  $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- Formules en  $t$  :  
soit  $t = \tan \frac{a}{2} \Rightarrow 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 a/2}$ ,  $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  et  $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$
- Formules de l'angle double :  
 $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$   
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

- Transformation de produits en sommes :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

- Transformation de sommes en produits :

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \text{et} \quad \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \text{et} \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

- Formules d'Euler :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{et} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ces formules permettent de redémontrer la majorité des formules citées plus haut.

## II. Fonctions dérivables

La dérivée d'une fonction  $f$  en un point  $x_0$  mesure le taux de croissance de  $f$  en ce point. Géométriquement, elle correspond à la pente de la droite qui est tangente à la courbe  $f(x)$  au point  $x_0$ . Bien qu'introduit par Newton et Leibniz, le concept de dérivée tient sa définition moderne et rigoureuse du mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Le terme même de dérivée est dû à Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), mathématicien et astronome italien.

### II.1. Définitions

- Soit  $f$  une fonction définie sur un voisinage de  $x_0$  :  $f$  est **dérivable** en  $x_0$  si  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  tend vers une limite finie quand  $x$  tend vers  $x_0$ . Cette limite finie, si elle existe, est appelée **dérivée** de  $f$  au point  $x_0$  et notée  $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Par cette formule il est possible de trouver l'expression des dérivées de toutes les fonctions usuelles (puissances, fonctions trigonométriques, exponentielles, etc.)

- Si  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  tend vers une limite finie quand  $x \rightarrow x_0^+$  on dit que  $f$  admet au point  $x_0$  une **dérivée à droite** égale à cette limite finie. On la note  $f'(x_0^+)$ . On définit de même la **dérivée à gauche**. Si  $f'(x_0^+)$  et  $f'(x_0^-)$  existent et sont distinctes,  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$  : on dit que la courbe présente un **point anguleux**. Si  $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ .
- Théorème** : une fonction dérivable en un point est continue en ce point.
- La dérivabilité est *a priori* une notion locale : si la fonction  $f$  définie sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}$  admet une dérivée en tout point de  $D$ , on définit la **fonction dérivée** de  $f$  notée  $f'$ . Cette fonction est dite **de classe  $C^n$**  si elle est dérivable  $n$  fois sur  $D$  et si de plus la dérivée  $n^{\text{ème}}$  est continue sur  $D$ . Si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $D$ , elle est de classe  $C^\infty$ .
- Lorsque la fonction dérivable  $f$  est **croissante (décroissante)**, la fonction dérivée est positive (négative). Elle s'annule aux points où  $f$  admet des tangentes horizontales.

### II.2. Règles de dérivation

- produit scalaire :  $h(x) = \lambda f(x) \Rightarrow h'(x) = \lambda f'(x)$

- somme :  $h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$
- produit :  $h(x) = f(x)g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- fraction :  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$  et  $h(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$
- puissance  $n^{\text{ème}}$  :  $h(x) = (f(x))^n \Rightarrow h'(x) = n f'(x)(f(x))^{n-1}$
- fonction composée :  $h(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow h'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)$
- fonction réciproque :  $h(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$
- fonctions particulières :  
 $h(x) = \exp(f(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \exp(f(x))$   
 $h(x) = \ln(f(x)) \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

**Ex :** calculer la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $y = \frac{x^2 + 1}{(x+1)^3}$

on décompose la fraction rationnelle en éléments simples et on montre que  $y = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$

$$\text{soit } z = \frac{1}{x+1} \Rightarrow z' = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow z'' = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow z''' = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

on suppose que  $z^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$  et on montre que cette expression est valable au rang  $n+1$

$$y = z'' + 2z' + z \Rightarrow y^{(n)} = z^{(n+2)} + 2z^{(n+1)} + z^{(n)} = (-1)^{n+2} \frac{(n+2)!}{(x+1)^{n+3}} + 2(-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}} + (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+3}} \left[ (n+1)(n+2) - 2(n+1)(x+1) + (x+1)^2 \right] = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+3}} (x^2 - 2nx + n^2 + n + 1)$$

**Ex :** calculer la dérivée de  $y = \arcsin x$

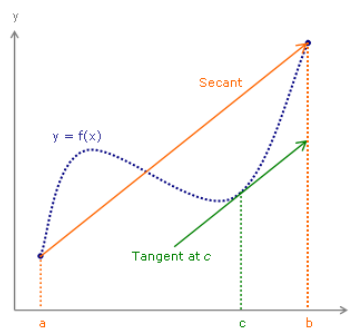
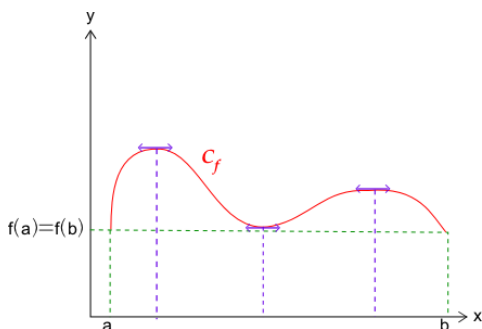
$$y = \sin^{-1} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$\text{or } \cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2 \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{donc } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

### II.3. Propriétés

- **Théorème de Rolle** : si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et si  $f(a) = f(b)$  alors  $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ . Géométriquement, cela signifie que si une courbe coupe la droite horizontale AB en  $x = a$  et  $x = b$  et possède une tangente en chaque point de l'intervalle, il existe au moins un point  $c$  entre  $a$  et  $b$  où la tangente est parallèle à l'axe des  $x$ .
- **Théorème des accroissements finis** : si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , alors  $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$ . Géométriquement, ceci revient à dire qu'il existe au moins un point  $c$  entre  $a$  et  $b$  où la tangente à la courbe est parallèle à la droite AB.



- **Formule de Taylor-Lagrange** : si  $f$  est une fonction de classe  $C^n$  sur  $[a, b]$  admettant une dérivée  $n+1$ <sup>ème</sup> sur  $]a, b[$ , alors  $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$   
C'est la **formule de Taylor-Lagrange** à l'ordre  $n$  appliquée à la fonction  $f$  sur  $[a, b]$ . On appelle **reste de Lagrange** à l'ordre  $n$  la quantité  $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ .

- **Formule de Taylor-Young** : si  $f$  est une fonction de classe  $C^{n-1}$  sur un intervalle  $I$  contenant  $a$  et si  $f^{(n)}(a)$  existe, alors il existe une fonction  $o(x)$  définie sur  $I$  telle que  $\forall x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(x^{n+1}) \text{ avec la condition } \lim_{x \rightarrow a} o(x^{n+1}) = 0$$

On parle de **développement de Taylor** de  $f$  à l'ordre  $n$  au voisinage de  $a$ . En analyse, le développement de Taylor permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

- On appelle **polynôme de Taylor** de la fonction  $f$  à l'ordre  $n$  au voisinage de  $a$  le polynôme qui s'écrit :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a).$$

### III. Fonctions de plusieurs variables

#### III.1. Définition

Nous étudierons dans ce chapitre les techniques de calcul pour des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^n$ , donc dépendantes de  $n$  variables réelles, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^m$  si l'on généralise cette définition). On appelle **fonction de plusieurs variables** la correspondance qui associe à l'ensemble des variables  $n$  indépendantes  $x, y, \dots, z$  une valeur bien déterminée de la variable  $U$ . On écrit par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, \dots, z) \mapsto U = f(x, y, \dots, z) \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, \dots, z) \mapsto (U = f(x, y, \dots, z), V = g(x, y, \dots, z)) \end{array} \right.$$

Pour définir une fonction de plusieurs variables, il faut considérer un espace topologique dont chaque variable constitue une dimension. Selon le nombre de variables, le domaine de définition de la fonction peut être une **surface** (fonction de deux variables), un **volume** (fonction de trois variables), ou dans le cas général, un espace à  $n$  dimensions.

#### III.2. Dérivées partielles du premier ordre

Les définitions et résultats de cette section sont énoncés pour la dimension 2 afin de ne pas compliquer les notations. Ils peuvent être facilement généralisés pour une dimension quelconque. Considérons une fonction de deux variables  $U = f(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et plaçons-nous au point de coordonnées  $(a, b)$  du domaine de définition. Donnons à  $x$  un accroissement  $\Delta x$  à partir de  $a$  et laissons  $y$  constant et égal à  $b$ . La fonction  $U = f(x, y)$  subit alors un

accroissement  $\Delta U = f(a + \Delta x, b) - f(a, b)$ . On appelle dérivée partielle par rapport à  $x$  de la fonction  $f$  au point  $(a, b)$  la limite du rapport  $\frac{\Delta U}{\Delta x}$  quand  $\Delta x$  tend vers zéro :

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$$

De même, en laissant  $x$  constant et égal à  $a$  et en faisant subir à  $y$  un accroissement  $\Delta y$  à partir de  $b$ , on définit la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $y$  au point  $(a, b)$  par :

$$f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$$

- **Définition** : soit la fonction  $f$  définie sur le domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $f$  admet des dérivées partielles par rapport à  $x$  et à  $y$  en tout point de son domaine de définition, on écrit les fonctions dérivées partielles  $f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  et  $f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ .
- **Définition** : soit la fonction  $f$  définie sur un domaine ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $f$  est continûment différentiable sur  $D$  si les dérivées partielles, vues comme des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , sont continues en tout point de  $D$ .
- **Définition** : on appelle **vecteur gradient** de la fonction  $f$  le vecteur des dérivées partielles du premier ordre

$$\bar{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Pratiquement, le gradient indique la direction de la plus grande variation du champ scalaire (fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ ) et l'intensité de cette variation. Par exemple, le gradient de l'altitude est dirigé selon la ligne de plus grande pente et sa norme augmente avec la pente.

- **Définition** : soit  $D$  un domaine ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Phi : (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$  une application de  $D$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $(a, b)$  un point de  $D$ . On appelle **matrice jacobienne** de  $\Phi$  au point  $(a, b)$  la matrice des dérivées partielles de  $f$  et  $g$  notée :

$$MJ(\Phi)(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} (a, b)$$

**Ex** : déterminer la matrice jacobienne de  $\Phi(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (y^2 \cos 3x, \exp(x^2 + y^2))$

$$f_x(x, y) = -3y^2 \sin 3x \text{ et } f_y(x, y) = 2y \cos 3x$$

$$g_x(x, y) = 2x \exp(x^2 + y^2) \text{ et } g_y(x, y) = 2y \exp(x^2 + y^2)$$

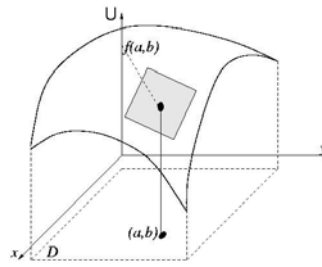
$$\text{donc } MJ(\Phi)(x, y) = \begin{pmatrix} -3y^2 \sin 3x & 2y \cos 3x \\ 2x \exp(x^2 + y^2) & 2y \exp(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

### III.3. Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables

- **Théorème** : soit  $D$  un domaine ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : (x, y) \mapsto U = f(x, y)$  une fonction continûment différentiable de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  et  $(a, b)$  un point de  $D$ . Les variations de  $f$  autour du point  $(a, b)$  peuvent être approchées par une application linéaire, la **différentielle** de  $f$  définie par :

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + o(x, y) \text{ avec } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{o(x, y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

La surface d'équation  $U = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$  est celle du plan tangent à la surface  $U = f(x,y)$  au point  $(a,b)$ .



- **Définition** : soit une fonction  $U = f(x,y)$  admettant les dérivées partielles  $f_x(x,y)$  et  $f_y(x,y)$ . On appelle **différentielle totale**  $df$  de  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $(dx, dy)$  associe :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

La différentielle totale d'une fonction est donc son **accroissement infinitésimal**, qui s'écrit comme une combinaison des accroissements infinitésimaux des différentes variables.

**Ex :** calculer la différentielle totale du volume d'un cône de révolution

le volume d'un cône de hauteur  $h$  et de rayon à la base  $r$  est donné par la formule :  $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$

la dérivée partielle de  $V$  par rapport à  $r$  est égale à  $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi}{3} rh$  : elle décrit la façon dont le volume du cône varie si son rayon est changé en maintenant sa hauteur constante.

la dérivée partielle par rapport à  $h$  est égale à  $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{3} r^2$  : elle représente la façon dont le volume du cône varie si c'est la hauteur du cône qui est changée tout en maintenant le rayon constant.

on peut alors exprimer la façon dont varie le volume si à la fois le rayon et la hauteur du cône sont changés :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi rh}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

- **Application au calcul d'erreur** : soit une grandeur  $G$  dépendant de  $n$  paramètres  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Si l'on mesure ces paramètres avec les erreurs absolues  $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n$ , la valeur de  $G$  ne peut être déduite qu'avec une erreur absolue  $\Delta G$  telle que  $\Delta G = G(P_1 \pm \Delta P_1, P_2 \pm \Delta P_2, \dots, P_n \pm \Delta P_n) - G(P_1, P_2, \dots, P_n)$ . Lorsque les erreurs absolues  $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n$  sont petites par rapport aux valeurs des paramètres  $P_1, P_2, \dots, P_n$  on peut montrer que l'accroissement total  $\Delta G$  s'exprime linéairement en fonction de  $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n$  et se confond avec la différentielle totale  $dG$  lorsque  $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n$  sont infiniment petits :

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial P_1} \Delta P_1 + \frac{\partial G}{\partial P_2} \Delta P_2 + \dots + \frac{\partial G}{\partial P_n} \Delta P_n$$

Les dérivées partielles  $\frac{\partial G}{\partial P_1}, \frac{\partial G}{\partial P_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial P_n}$  peuvent être positives ou négatives aussi pour encadrer de façon certaine la valeur de  $G$ , on prend le cas le plus défavorable où toutes les valeurs s'ajoutent. On écrit donc :

$$\Delta G \leq \left| \frac{\partial G}{\partial P_1} \right| \Delta P_1 + \left| \frac{\partial G}{\partial P_2} \right| \Delta P_2 + \dots + \left| \frac{\partial G}{\partial P_n} \right| \Delta P_n$$

où  $\left| \frac{\partial G}{\partial P_1} \right|, \left| \frac{\partial G}{\partial P_2} \right|, \dots, \left| \frac{\partial G}{\partial P_n} \right|$  sont les valeurs absolues des dérivées partielles. La valeur de  $G$  se trouve dans le domaine  $G \pm \Delta G$ . Souvent on calcule  $\Delta G/G$  qui est l'erreur relative commise dans la mesure de  $G$ .

**Ex :** **erreur sur le volume d'un cône de révolution**

on suppose que l'on a mesuré  $h = 2 \pm 0.01\text{m}$  et  $r = 0.5 \pm 0.01\text{m}$

on a calculé précédemment la différentielle totale du volume du cône :  $dV = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$

l'erreur sur le volume s'écrit donc  $\Delta V \leq \left| \frac{2\pi r h}{3} \right| \Delta r + \left| \frac{\pi r^2}{3} \right| \Delta h$  et  $V = 0.5236 \pm 0.023\text{m}^3$

les paramètres étant tous positifs, on peut simplifier l'expression en  $\Delta V \leq \frac{2\pi r h}{3} \Delta r + \frac{\pi r^2}{3} \Delta h$  et calculer l'erreur

relative  $\frac{\Delta V}{V} \leq 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$

**III.4. Dérivées partielles d'ordre supérieur**

Soit  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  une application de  $D \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , continûment différentiable sur  $D$ . Les deux dérivées partielles  $f_x(x, y)$  et  $f_y(x, y)$  sont aussi des application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Si elles-mêmes sont continûment différentiables, on dit que  $f$  est deux fois continûment différentiable. Leurs dérivées partielles, au nombre de quatre, sont les **dérivées partielles du second ordre** de  $f$  et on les note :

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} ; f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} ; f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} ; f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

- **Définition** : on appelle **matrice hessienne** de la fonction  $f$  la matrice des dérivées partielles du second ordre :

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Puisque  $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$ , la matrice  $H$  est symétrique.

- **Définition** : on appelle **Laplacien** de la fonction  $f$  la somme des dérivées secondes du champ scalaire par rapport à chacune des variables  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ . Le Laplacien apparaît dans l'écriture de plusieurs équations aux dérivées partielles qui jouent un rôle fondamental en physique.

Soit  $\Phi : (x, y, z) \mapsto (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$  une application deux fois continûment différentiable de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

- **Définition** : on appelle **rotationnel** de la fonction  $\Phi$  le vecteur  $\vec{\text{rot}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ .

Il exprime la tendance qu'a un champ scalaire à tourner autour d'un point.

- **Définition** : on appelle **divergence** de la fonction  $f$  le réel  $\vec{\text{div}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$ .

- **Développement de Taylor** : soit  $f(x, y)$  une fonction de deux variables  $x$  et  $y$ . Le développement de Taylor de  $f$  à l'ordre  $n$  en  $a$  et  $b$  s'écrit :

$$f(x, y) = f(a, b) + (x-a)f_x(a, b) + (y-b)f_y(a, b) + \frac{1}{2!} \left\{ (x-a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b) f_{xy}(a, b) + (y-b)^2 f_{yy}(a, b) \right\} + \dots$$

où  $f_x(a, b)$  et  $f_y(a, b)$  désignent les dérivées partielles du premier ordre par rapport à  $x$  et  $y$  calculées en  $x = a$  et  $y = b$ . On peut généraliser cette expression pour une fonction de plusieurs variables  $f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_p)$ .

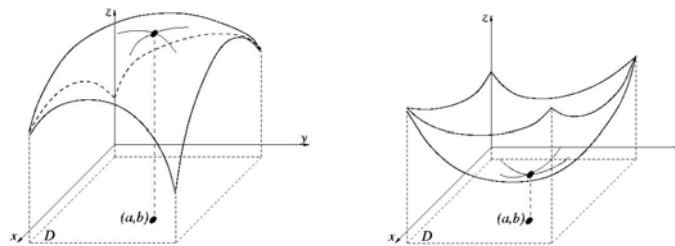
### III.5. Extrema

Le but de ce paragraphe est de déterminer les points de l'espace où une fonction  $f$  de plusieurs variables atteint son maximum ou son minimum. Afin de mieux visualiser les notions introduites, considérons la fonction de deux variables  $f : (x, y) \mapsto z = f(x, y)$ .

- **Théorème** : soit  $D$  un domaine ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  une fonction continûment dérivable sur  $D$ . Soit  $(a, b)$  un point de  $D$ . Si  $f$  admet un **maximum local** ou un **minimum local** en  $(a, b)$ , alors le gradient de  $f$  au point  $(a, b)$  est nul :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

La nullité du gradient n'est qu'une condition nécessaire.



## IV. Intégrales et primitives

### IV.1. Intégrale simple

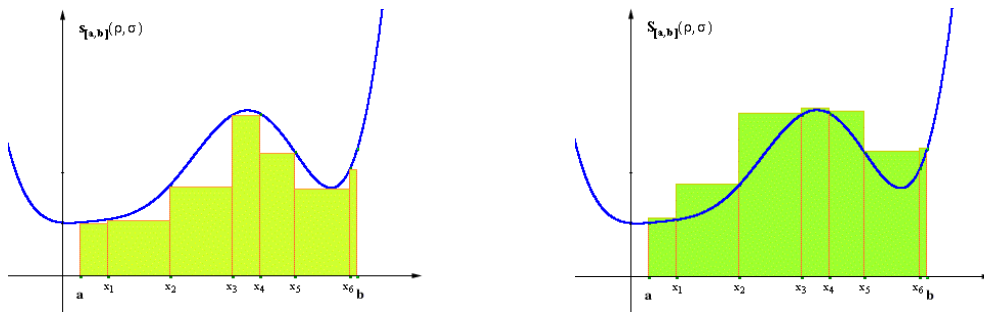
#### a) Sommes de Darboux

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$  avec  $a < b$  et  $f$  bornée sur  $[a, b]$ . On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n-1$  points intermédiaires  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  tels que  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ . On pose  $a = x_0$  et  $b = x_n$ . Il existe une infinité de subdivisions  $(\Delta)$  car on peut choisir  $n$  et la position des points arbitrairement. A chaque subdivision, on associe une **somme de Darboux inférieure**  $s(\Delta)$  et une **somme de Darboux supérieure**  $S(\Delta)$  :

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i \quad \text{et} \quad S(\Delta) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i$$

où  $m_i$  et  $M_i$  sont les bornes inférieures et supérieures de  $f$  sur  $[x_{i-1}, x_i]$ . Ces bornes existent car  $f$  étant bornée sur  $[a, b]$ , elle est aussi bornée sur chaque sous-segment. Soient (e) l'ensemble des sommes de Darboux inférieures et (E) l'ensemble des sommes de Darboux supérieures. On peut montrer que tout élément de (e) est inférieur ou égal aux éléments de (E). Donc (e) est majoré par un élément quelconque de (E) et admet une borne supérieure  $I'$ . De même, (E) est minoré par un élément quelconque de (e) et admet une borne inférieure  $I''$ . la fonction  $f$  définie et bornée sur  $[a, b]$  est dite intégrable sur  $[a, b]$  au sens de Riemann si les deux ensembles (e) et (E) formés par les sommes de Darboux  $s(\Delta)$  et  $S(\Delta)$  sont adjacents. La borne commune de ces deux ensembles  $I = I' = I''$  est appelée **intégrale** de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  et est notée  $I = \int_a^b f(x) dx$ .



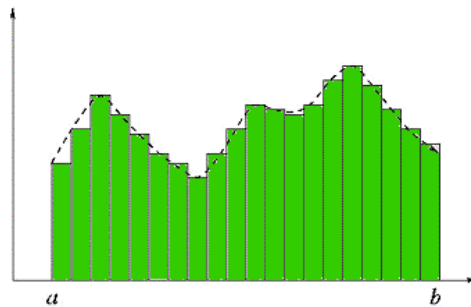


### b) Somme de Riemann

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$  avec  $a < b$  et  $f$  bornée sur  $[a, b]$ . On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n-1$  points intermédiaires  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  tels que  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ . On pose  $a = x_0$  et  $b = x_n$ . Il existe une infinité de subdivisions  $(\Delta)$  car on peut choisir  $n$  et la position des points arbitrairement. A chaque subdivision, on associe une somme de Riemann  $S$  :

$$S = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\lambda_i)$$

avec  $\lambda_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Par définition  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  au sens de Riemann s'il existe un réel  $I$  tel que  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que pour toute subdivision  $(\Delta)$  vérifiant  $x_i - x_{i-1} < \alpha$  et quel que soit le choix de  $\lambda_i$ , on ait  $|S - I| < \varepsilon$ .  $I$  est appelée intégrale de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  et est notée  $I = \int_a^b f(x) dx$ .



### c) Propriétés

- **Théorème** : une fonction  $f$  définie et bornée sur le segment  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si elle l'est sur  $[b, a]$  et alors  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .
- **Théorème** : toute fonction monotone sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
- **Théorème** : toute fonction continue sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
- **Théorème** : si  $f$  est bornée et intégrable sur  $[a, b]$ , les bornes étant  $m$  et  $M$ , alors  $\exists \mu \in [m, M]$  tel que  $\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$ .  $\mu$  est la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$ .
- **Formule de Chasles** : si la fonction  $f$  est bornée ou intégrable sur chacun des deux intervalles  $[a, c]$  et  $[c, b]$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- **Théorème** : si  $f$  et  $g$  sont bornées et intégrables sur  $[a, b]$ ,  $f+g$  est intégrable sur  $[a, b]$  et 
$$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$
- **Théorème** : si  $f$  est bornée et intégrable sur  $[a, b]$  et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction  $\lambda f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

- **Inégalité de Schwarz** :  $\left(\int_a^b (fg)(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \times \int_a^b (g(x))^2 dx$

**d) Intégrale fonction d'une extrémité de l'intervalle d'intégration**

- **Théorème** : si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et si  $x_0$  est un point de  $[a, b]$ , la fonction  $F$  définie sur  $[a, b]$  par  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$  est continue. Dans le cas particulier où  $f$  est continue, alors  $F$  est dérivable en tout point de  $[a, b]$  et  $F'(x) = f(x)$ .
- **Primitive d'une fonction continue** : si  $f$  est une fonction définie sur  $[a, b]$ ,  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$  si et seulement si  $\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)$ .
- **Théorème** : si  $f$  admet une primitive  $F$  sur  $[a, b]$ , elle admet une infinité de primitives qui sont toutes les fonctions  $G$  définies par  $G(x) = F(x) + cte$ .
- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et  $I = \int_a^b f(t) dt$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ , alors :

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0) = [F(t)]_{x_0}^x$$

**IV.2. Recherche de fonctions primitives**

**a) Primitives usuelles**

domaine de définition	fonction $f$	primitive $F$
$\mathbb{R}$	$x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$ax + b > 0$	$(ax + b)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C$
$\mathbb{R}$	$e^x$	$e^x + C$
$\mathbb{R}$	$e^{ax}$ avec $a \neq 0$	$\frac{e^{ax}}{a} + C$
$\mathbb{R}$	$a^x$ avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$]k\pi, (k+1)\pi[$	$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
$x^2 + h > 0$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + h}}$	$\ln x + \sqrt{x^2 + h}  + C$

**b) Changement de variable**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle et  $F$  une primitive de  $f$  sur cet intervalle :

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0)$$

Soit une application  $g$  de  $[\alpha, \beta]$  dans cet intervalle. On supposera que  $g$  est continue, dérivable et à dérivée continue.

On désigne par  $\Phi$  la fonction  $\Phi(y) = (F \circ g)(y) \Rightarrow \Phi'(y) = (F' \circ g)(y) \times g'(y) = (f \circ g)(y) \times g'(y)$ . Alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \times g'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u) du$$

**Ex :** calculer une primitive de  $f(x) = x \sin x^2$

$$F(x) = \int_{x_0}^x t \sin t^2 dt$$

on pose  $t^2 = u \Rightarrow 2t dt = du$

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0^2}^{x^2} \sin u du = \frac{1}{2} [-\cos u]_{x_0^2}^{x^2} = -\frac{1}{2} \cos x^2 + cte$$

### c) Intégration par partie

Soient  $u(x)$  et  $v(x)$  deux fonctions continues, dérivables, à dérivées continues sur  $[a, b]$ .

$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \Rightarrow$  la fonction  $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$  a pour primitive le produit  $u(x)v(x)$

donc  $\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx = [u(x)v(x)]_a^b \Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$ .

**Ex :** calculer une primitive de  $f(x) = \arctan x$

$$F(x) = \int_{x_0}^x \arctan t dt$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u = \arctan t \Rightarrow du = \frac{dt}{1+t^2} \\ dv = dt \Rightarrow v = t \end{cases}$$

$$F(x) = [t \arctan t]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \frac{t}{1+t^2} dt = [t \arctan t]_{x_0}^x - \frac{1}{2} [\ln(1+t^2)]_{x_0}^x = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + cte$$

### d) Primitive d'un polynôme en sin x et cos x

Soit  $F(x) = \int_{x_0}^x \sin^p t \cos^q t dt$  avec  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$

- supposons qu'un des exposants est impair, par exemple  $p = 2p'+1$  et  $q = 2q'$

$$F(x) = \int_{x_0}^x \sin^{2p'+1} t \cos^{2q'} t dt = \int_{x_0}^x (1 - \cos^2 t)^{p'} \cos^{2q'} t \sin t dt$$

On pose  $u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t dt$

$$F(x) = -\int_{\cos x_0}^{\cos x} (1-u^2)^{p'} u^{2q'} du$$

De même si  $p = 2p'$  et  $q = 2q'+1$ , on pose  $u = \sin t$

- supposons que les deux exposants sont impairs :  $p = 2p'+1$  et  $q = 2q'+1$ . On peut utiliser la méthode précédente ou faire un autre changement de variable.

$$F(x) = \int_{x_0}^x (\sin^2 t)^{p'} (\cos^2 t)^{q'} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^{p'} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^{q'} \sin 2t dt$$

On pose  $u = \cos 2t \Rightarrow du = -2 \sin 2t dt$

$$F(x) = -\frac{1}{4} \int_{\cos 2x_0}^{\cos 2x} \left(\frac{1-u}{2}\right)^{p'} \left(\frac{1+u}{2}\right)^{q'} du$$

- supposons que les deux exposants sont pairs : on est obligé de linéariser.

**Ex :** calculer une primitive de  $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$

$$F(x) = \int_{x_0}^x \cos^4 t \sin^2 t dt$$

$$\cos^4 t \sin^2 t = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^4 \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \cos^4 t \sin^2 t &= -\frac{1}{2^6} (e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}) \times (e^{2it} - 2 + e^{-2it}) \\ &= -\frac{1}{2^6} \left[ (e^{6it} + e^{-6it}) + 2(e^{4it} + e^{-4it}) - (e^{2it} + e^{-2it}) - 4 \right] \\ &= -\frac{1}{2^5} (\cos 6t + 2 \cos 4t - \cos 2t - 2) \end{aligned}$$

$$F(x) = -\frac{1}{2^5} \left( \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} - 2x \right) + cte$$

**e) Primitive d'un polynôme en sin x, cos x et e<sup>ax</sup>**

On transforme les produits de lignes trigonométriques en sommes et on se ramène au calcul d'intégrales de la forme :

$$A(x) = \int_{x_0}^x e^{\alpha t} \cos \beta t dt \quad \text{ou} \quad B(x) = \int_{x_0}^x e^{\alpha t} \sin \beta t dt$$

$$A(x) + iB(x) = \int_{x_0}^x e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) dt = \int_{x_0}^x e^{(\alpha+i\beta)t} dt = \left[ \frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{\alpha+i\beta} \right]_{x_0}^x = \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta} + cte = \frac{e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + cte$$

$$\text{Donc } A(x) = \frac{e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + cte \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + cte.$$

$A(x)$  et  $B(x)$  sont de la forme  $e^{\alpha x} (\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x) + cte$ . Donc pour calculer  $A(x)$  et  $B(x)$ , deux méthodes :

- on associe les deux intégrales en calculant  $A(x) + iB(x)$ .
- on connaît la forme générale de l'intégrale et on détermine  $\lambda$  et  $\mu$ . Pour cela on opère par identification en écrivant que la dérivée de  $e^{\alpha x} (\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$  est égale à  $e^{\alpha x} \cos \beta x$  ou  $e^{\alpha x} \sin \beta x$ .

**Ex :** calculer une primitive de  $f(x) = e^{-x} \sin^3 x$

$$F(x) = \int_{x_0}^x e^{-t} \sin^3 t dt$$

$$\sin^3 t = \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3it} - e^{-3it} - 3(e^{it} - e^{-it})) = -\frac{1}{4} \sin 3t + \frac{3}{4} \sin t$$

$$F(x) = -\frac{1}{4} \int_{x_0}^x e^{-t} \sin 3t dt + \frac{3}{4} \int_{x_0}^x e^{-t} \sin t dt = -\frac{1}{4} G(x) + \frac{3}{4} H(x)$$

\*  $G(x)$  est de la forme  $e^{-x} (\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x) + cte$ .

$$G'(x) = e^{-x} \sin 3x \Rightarrow e^{-x} (-\lambda \cos 3x - \mu \sin 3x - 3\lambda \sin 3x + 3\mu \cos 3x) = e^{-x} \sin 3x \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{10} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{1}{10}$$

$$\text{donc } G(x) = e^{-x} \left( -\frac{3}{10} \cos 3x - \frac{1}{10} \sin 3x \right) + cte$$

\* pour calculer  $H(x)$  on lui associe  $K(x) = \int_{x_0}^x e^{-t} \cos t dt$

$$K(x) + iH(x) = \int_{x_0}^x e^{-t} (\cos t + i \sin t) dt = \int_{x_0}^x e^{(-1+i)t} dt = \left[ \frac{e^{(-1+i)t}}{-1+i} \right]_{x_0}^x = \frac{-1-i}{2} e^{-x} (\cos x + i \sin x) + cte$$

$$\text{donc } H(x) = \frac{e^{-x}}{2} (-\sin x - \cos x) + cte$$

$$* \text{ alors } F(x) = \frac{1}{40} e^{-x} (3 \cos 3x + \sin 3x) - \frac{3}{8} e^{-x} (\cos x + \sin x) + cte$$

**f) Primitive d'un polynôme en  $x$  et  $e^{\alpha x}$**

Soit  $F(x) = \int_{x_0}^x t^n e^{\alpha t} dt$ . On va chercher la forme de ces intégrales en établissant une formule de récurrence. On pose  $u = t^n \Rightarrow du = nt^{n-1} dt$  et  $dv = e^{\alpha t} dt \Rightarrow v = e^{\alpha t} / \alpha$

$$\begin{aligned}
 F_n(x) &= \left[ \frac{t^n e^{\alpha t}}{\alpha} \right]_{x_0}^x - \frac{n}{\alpha} F_{n-1}(x) \\
 F_{n-1}(x) &= \left[ \frac{t^{n-1} e^{\alpha t}}{\alpha} \right]_{x_0}^x - \frac{n-1}{\alpha} F_{n-2}(x) && \times \left( \frac{-n}{\alpha} \right) \\
 F_{n-2}(x) &= \left[ \frac{t^{n-2} e^{\alpha t}}{\alpha} \right]_{x_0}^x - \frac{n-2}{\alpha} F_{n-3}(x) && \times \left( \frac{-n}{\alpha} \right) \left( \frac{-n+1}{\alpha} \right) \\
 &\dots\dots\dots && \dots\dots\dots \\
 F_2(x) &= \left[ \frac{t^2 e^{\alpha t}}{\alpha} \right]_{x_0}^x - \frac{2}{\alpha} F_1(x) && \times \left( \frac{-n}{\alpha} \right) \left( \frac{-n+1}{\alpha} \right) \dots \left( \frac{-3}{\alpha} \right) \\
 F_1(x) &= \left[ \frac{t e^{\alpha t}}{\alpha} \right]_{x_0}^x - \frac{1}{\alpha} F_0(x) && \times \left( \frac{-n}{\alpha} \right) \left( \frac{-n+1}{\alpha} \right) \dots \left( \frac{-3}{\alpha} \right) \left( \frac{-2}{\alpha} \right) \\
 F_0(x) &= \left[ \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \right]_{x_0}^x && \times \left( \frac{-n}{\alpha} \right) \left( \frac{-n+1}{\alpha} \right) \dots \left( \frac{-3}{\alpha} \right) \left( \frac{-2}{\alpha} \right) \left( \frac{-1}{\alpha} \right) \\
 \hline
 F_n(x) &= \left[ \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \times \left( t^n + \left( \frac{-n}{\alpha} \right) t^{n-1} + \dots + \left( \frac{-n}{\alpha} \right) \left( \frac{-n+1}{\alpha} \right) \dots \left( \frac{-3}{\alpha} \right) \left( \frac{-2}{\alpha} \right) t + \left( \frac{-n}{\alpha} \right) \left( \frac{-n+1}{\alpha} \right) \dots \left( \frac{-3}{\alpha} \right) \left( \frac{-2}{\alpha} \right) \left( \frac{-1}{\alpha} \right) \right]_{x_0}^x
 \end{aligned}$$

Donc  $F_n(x) = e^{\alpha x} P_n(x) + cte$  avec  $P_n(x)$  un polynôme de degré  $n$ . La méthode de résolution consiste à retenir la forme des primitives et à opérer par identification.

**Ex :** calculer une primitive de  $f(x) = e^x (x^2 + x - 1)$

$$F(x) = \int_{x_0}^x e^t (t^2 + t - 1) dt$$

on sait que  $F(x)$  est de la forme  $e^x (ax^2 + bx + c) + cte$

$$\left. \begin{aligned}
 F'(x) &= e^x (ax^2 + bx + c + 2ax + b) = e^x (ax^2 + (2a+b)x + (b+c)) \\
 &\text{or } F'(x) = e^x (x^2 + x - 1)
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1, b = -1, c = 0$$

donc  $F(x) = e^x (x^2 - x) + cte$

**g) Primitive d'un polynôme en  $x$ ,  $\sin x$  et  $\cos x$**

On transforme les produits de lignes trigonométriques en sommes et on se ramène au calcul d'intégrales de la forme :

$$A(x) = \int_{x_0}^x t^n \cos \beta t dt \quad \text{ou} \quad B(x) = \int_{x_0}^x t^n \sin \beta t dt$$

- si  $n$  n'est pas trop grand, on effectue des intégrations par parties successives.
- on cherche la forme des primitives pour identifier. Soit  $A(x) + iB(x) = \int_{x_0}^x t^n e^{i\beta t} dt$  : d'après le paragraphe précédent, cette intégrale est le produit de  $e^{i\beta x}$  par un polynôme de degré  $n$  à coefficients complexes.

$$A(x) + iB(x) = (\cos \beta x + i \sin \beta x) (P_n(x) + iQ_n(x)) + cte$$

$P_n$  et  $Q_n$  sont des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  et à coefficients constants.

$$A(x) = P_n(x) \cos \beta x - Q_n(x) \sin \beta x + cte \text{ et } B(x) = P_n(x) \sin \beta x + Q_n(x) \cos \beta x + cte$$

**Ex :** calculer une primitive de  $f(x) = x^2 \cos^3 x$

$$F(x) = \int_{x_0}^x t^2 \cos^3 t dt$$

$$\cos^3 t = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3it} + e^{-3it} + 3(e^{it} + e^{-it})) = \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t$$

$$\text{donc } F(x) = \frac{1}{4} \int_{x_0}^x t^2 \cos 3t dt + \frac{3}{4} \int_{x_0}^x t^2 \cos t dt = \frac{1}{4} G(x) + \frac{3}{4} H(x)$$

\* on calcule  $G(x)$  par identification :  $G(x) = (ax^2 + bx + c) \cos 3x + (dx^2 + ex + f) \sin 3x + cte$

la fonction  $t^2 \cos 3t$  est paire donc on cherche une primitive impaire  $\Rightarrow a = c = e = 0$

$$G(x) = bx \cos 3x + (dx^2 + f) \sin 3x + cte$$

$$G'(x) = b \cos 3x - 3bx \sin 3x + 2dx \sin 3x + 3(dx^2 + f) \cos 3x = (b + 3dx^2 + 3f) \cos 3x + (2dx - 3bx) \sin 3x$$

$$\text{or } G'(x) = x^2 \cos 3x \Rightarrow b = \frac{2}{9} \text{ et } d = \frac{1}{3} \text{ et } f = -\frac{2}{27}$$

$$\text{donc } G(x) = \frac{2}{9} x \cos 3x + \left( \frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{27} \right) \sin 3x + cte$$

\* on calcule  $H(x)$  en intégrant successivement par partie :  $H(x) = \int_{x_0}^x t^2 \cos t dt$

$$\text{on pose } \begin{cases} u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt \\ dv = \cos t dt \Rightarrow v = \sin t \end{cases}$$

$$H(x) = [t^2 \sin t]_{x_0}^x - 2 \int_{x_0}^x t \sin t dt$$

$$\text{on pose } \begin{cases} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \sin t dt \Rightarrow v = -\cos t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(x) &= [t^2 \sin t]_{x_0}^x - 2 \left( [-t \cos t]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \cos t dt \right) \\ &= [t^2 \sin t]_{x_0}^x + 2[t \cos t]_{x_0}^x - 2[\sin t]_{x_0}^x \\ &= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + cte \end{aligned}$$

$$\text{donc } F(x) = \frac{1}{18} x \cos 3x + \frac{1}{4} \left( \frac{x^2}{3} - \frac{2}{27} \right) \sin 3x + \frac{3}{4} (x^2 - 2) \sin x + \frac{3}{2} x \cos x + cte$$

**h) Primitive de**  $\frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

- si le coefficient de  $x^2$  est négatif et le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  positif, on se ramène à une expression de la forme  $\frac{Au + B}{\sqrt{C^2 - u^2}}$  avec  $u$  une fonction de  $x$ .

$$\int_{u_0}^u \frac{At + B}{\sqrt{C^2 - t^2}} dt = -A \int_{u_0}^u \frac{-2t}{2\sqrt{C^2 - t^2}} dt + B \int_{u_0}^u \frac{1}{\sqrt{C^2 - t^2}} dt$$

On pose  $t = Cv \Rightarrow dt = C dv$

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^u \frac{At + B}{\sqrt{C^2 - t^2}} dt &= -A \left[ \sqrt{C^2 - t^2} \right]_{u_0}^u + B \int_{u_0/a}^{u/a} \frac{C}{C\sqrt{1-v^2}} dv \\ &= -A \left[ \sqrt{C^2 - t^2} \right]_{u_0}^u + B [\arcsin v]_{u_0/a}^{u/a} \\ &= -A \sqrt{C^2 - u^2} + B \arcsin \frac{u}{C} + cte \end{aligned}$$

**Ex :** calculer une primitive de  $f(x) = \frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{8t-3}{\sqrt{12t-4t^2-5}} dt = \int_{x_0}^x \frac{8t-3}{\sqrt{-(2t-3)^2+4}} dt$$

on pose  $2t-3 = u \Rightarrow 2dt = du$

$$F(x) = \int_{2x_0-3}^{2x-3} \frac{4u+9}{2\sqrt{4-u^2}} du = \int_{2x_0-3}^{2x-3} \frac{2u}{\sqrt{4-u^2}} du + \frac{9}{2} \int_{2x_0-3}^{2x-3} \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} du$$

on pose  $u = 2v \Rightarrow du = 2dv$

$$\begin{aligned} F(x) &= -2 \left[ \sqrt{4-u^2} \right]_{2x_0-3}^{2x-3} + \frac{9}{2} \int_{(2x_0-3)/2}^{(2x-3)/2} \frac{2dv}{2\sqrt{1-v^2}} dv = -2 \left[ \sqrt{4-u^2} \right]_{2x_0-3}^{2x-3} + \frac{9}{2} \left[ \arcsin v \right]_{(2x_0-3)/2}^{(2x-3)/2} \\ &= -2\sqrt{4-(2x-3)^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{2x-3}{2} + cte = -2\sqrt{12x-4x^2-5} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{2x-3}{2} + cte \end{aligned}$$

- si le coefficient de  $x^2$  est positif, on se ramène à une expression de la forme  $\frac{Au+B}{\sqrt{u^2+C}}$

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^u \frac{At+B}{\sqrt{t^2+C}} dt &= A \int_{u_0}^u \frac{2t}{2\sqrt{t^2+C}} dt + B \int_{u_0}^u \frac{1}{\sqrt{t^2+C}} dt \\ &= A \left[ \sqrt{t^2+C} \right]_{u_0}^u + B \left[ \ln \left| t + \sqrt{t^2+C} \right| \right]_{u_0}^u \\ &= A\sqrt{u^2+C} + B \ln \left| u + \sqrt{u^2+C} \right| + cte \end{aligned}$$

### i) Primitives des fractions rationnelles

Il s'agit de trouver la primitive d'une fraction rationnelle de la forme  $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ . On décompose la fraction rationnelle en **éléments simples**.

- Division euclidienne.** Si  $\deg A > \deg B$ , alors il existe un couple unique  $(Q, R)$  tel que  $A = BQ + R$ . On dit que  $Q$  est le quotient et  $R$  le **reste de la division euclidienne** de  $A$  par  $B$ . On peut donc écrire :

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{B(x)Q(x) + R(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \text{ avec } \deg R < \deg B.$$

- Polynômes irréductibles.** Les **polynômes irréductibles** sont des polynômes de degré 1 et des polynômes de degré 2 sans racine réelle. Tout polynôme se décompose de manière unique en un produit de polynômes irréductibles. On utilise cette décomposition pour  $B(x)$  au dénominateur de la fraction rationnelle.

$$B(x) = a \prod_i (x-r_i)^{m_i} \prod_j (x^2 + b_j x + c_j)^{n_j} \text{ avec } r_i \text{ les racines de } B \text{ et } \Delta = b_j^2 - 4c_j < 0$$

On suppose de plus que le numérateur n'a pas de facteur commun avec le dénominateur, sinon on simplifie par ce facteur commun.

- Pôles et éléments simples.** La fraction rationnelle est dite irréductible si et seulement si les polynômes  $A$  et  $B$  sont sans facteur commun. On appelle éléments simples de première espèce relatifs aux pôles  $r_i$  les fractions rationnelles

du type  $\frac{A_1}{x-r_i}, \frac{A_2}{(x-r_i)^2}, \dots, \frac{A_{m_i}}{(x-r_i)^{m_i}}$  où les  $A_k$  sont des constantes réelles. On appelle éléments simples de

deuxième espèce relatifs aux polynômes irréductibles  $x^2 + b_j x + c_j$  les fractions rationnelles du type

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + b_j x + c_j}, \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + b_j x + c_j)^2}, \dots, \frac{B_{n_j} x + C_{n_j}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}} \text{ où les } B_k \text{ et } C_k \text{ sont des constantes réelles.}$$

- Application au calcul de primitives.** Avec cette technique, on peut intégrer toute fraction rationnelle.
  - Partie polaire relative à un pôle réel et dénominateur de degré 1

$$\int_{x_0}^x \frac{A}{t-r} dt = A \left[ \ln|t-r| \right]_{x_0}^x = A \ln|x-r| + cte$$

- Partie polaire relative à un pôle réel et dénominateur de degré supérieur à 1

$$\int_{x_0}^x \frac{A}{(t-r)^k} dt = \int_{x_0}^x A(t-r)^{-k} dt = A \left[ \frac{(t-r)^{1-k}}{1-k} \right]_{x_0}^x = \frac{A(x-r)^{1-k}}{1-k} + cte$$

- Partie polaire relative à un pôle complexe et dénominateur de degré 1 : avant d'intégrer on regroupe les termes

$$\int_{x_0}^x \frac{A}{t-r} dt \text{ et } \int_{x_0}^x \frac{A^*}{t-r^*} dt \text{ où } A^* \text{ et } a^* \text{ sont les complexes conjugués de } A \text{ et } a.$$

$$\int_{x_0}^x \frac{A}{t-r} dt + \int_{x_0}^x \frac{A^*}{t-r^*} dt = \int_{x_0}^x \left( \frac{A}{t-r} + \frac{A^*}{t-r^*} \right) dt = \int_{x_0}^x \frac{A(t-r^*) + A^*(t-r)}{(t-r)(t-r^*)} dt = \int_{x_0}^x \frac{\gamma t + \delta}{t^2 + \lambda t + \mu} dt \text{ avec } \gamma, \delta, \lambda \text{ et } \mu \text{ des}$$

nombre réels. On fait apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.

$$\int_{x_0}^x \frac{\gamma t + \delta}{t^2 + \lambda t + \mu} dt = \int_{x_0}^x \frac{\frac{\gamma}{2}(2t + \lambda) + \varepsilon}{t^2 + \lambda t + \mu} dt = \frac{\gamma}{2} \int_{x_0}^x \frac{2t + \lambda}{t^2 + \lambda t + \mu} dt + \varepsilon \int_{x_0}^x \frac{dt}{t^2 + \lambda t + \mu} = \frac{\gamma}{2} \left[ \ln|t^2 + \lambda t + \mu| \right]_{x_0}^x + \varepsilon \int_{x_0}^x \frac{dt}{t^2 + \lambda t + \mu}$$

On pose ensuite  $t^2 + \lambda t + \mu = (t-p)^2 + q^2$  et on effectue le changement de variable  $t-p = qu \Rightarrow dt = q du$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{\gamma t + \delta}{t^2 + \lambda t + \mu} dt &= \frac{\gamma}{2} \left[ \ln|t^2 + \lambda t + \mu| \right]_{x_0}^x + \varepsilon \int_{x_0}^x \frac{dt}{(t-p)^2 + q^2} = \frac{\gamma}{2} \left[ \ln|t^2 + \lambda t + \mu| \right]_{x_0}^x + \varepsilon \int_{\frac{x_0-p}{q}}^{\frac{x-p}{q}} \frac{q du}{q^2 (u^2 + 1)} \\ &= \frac{\gamma}{2} \left[ \ln|t^2 + \lambda t + \mu| \right]_{x_0}^x + \frac{\varepsilon}{q} \left[ \arctan u \right]_{\frac{x_0-p}{q}}^{\frac{x-p}{q}} = \frac{\gamma}{2} \ln|x^2 + \lambda x + \mu| + \frac{\varepsilon}{q} \arctan \frac{x-p}{q} + cte \end{aligned}$$

- Partie polaire relative à un pôle complexe et dénominateur de degré supérieur à 1 : on regroupe les intégrales

$$\int_{x_0}^x \frac{A}{(t-r)^k} dt = \frac{A(x-r)^{1-k}}{1-k} + cte \text{ et } \int_{x_0}^x \frac{A^*}{(t-r^*)^k} dt = \frac{A^*(x-r^*)^{1-k}}{1-k} + cte \text{ où } A^* \text{ et } a^* \text{ sont les complexes conjugués}$$

de  $A$  et  $a$ .

$$\frac{A}{(1-k)(x-r)^{k-1}} + \frac{A^*}{(1-k)(x-r^*)^{k-1}} = \frac{1}{1-k} \frac{A(x-r^*)^{k-1} + A^*(x-r)^{k-1}}{\left[ (x-r)(x-r^*) \right]^{k-1}} = \frac{1}{1-k} \frac{A(x-r^*)^{k-1} + A^*(x-r)^{k-1}}{\left( x^2 - (r+r^*)x + rr^* \right)^{k-1}}$$

**Ex :** calculer une primitive de  $f(x) = \frac{x}{x^3 + x^2 + x + 1}$

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-i} + \frac{B^*}{x+i} = \frac{A}{x+1} + \frac{\alpha x + \beta}{x^2+1} \text{ où } A, \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels à déterminer. Par}$$

$$\text{identification on trouve } A = -\frac{1}{2}, \alpha = \beta = \frac{1}{2} \text{ donc } f(x) = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{x+1}{2(x^2+1)}$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + cte$$

### j) Primitives d'une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$

On se ramène à l'intégration d'une fraction rationnelle d'une variable en effectuant un changement de variable. Soit

$$u = \tan \frac{t}{2} \text{ alors } \sin t = \frac{2u}{1+u^2} \text{ et } \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, du = \frac{1}{2} \left( 1 + \tan^2 \frac{t}{2} \right) dt \text{ et } dt = \frac{2du}{1+u^2}$$

## V. Les équations différentielles

Les équations différentielles remontent à l'invention du calcul différentiel et intégral, faite indépendamment par le britannique Newton (1643-1727) et l'allemand Leibniz (1646-1716) dans les années 1670-1680. Au début, ces équations servaient à résoudre des problèmes géométriques, comme la détermination d'une courbe dont les tangentes sont soumises à une condition donnée. C'est seulement vers 1730 que le mathématicien et physicien suisse Euler (1707-



1783) a commencé à les utiliser pour traiter des problèmes de dynamique. Aujourd'hui, elles apparaissent dans presque tous les domaines de la science et de la technique : mathématiques, physique, chimie, biologie, etc.

### V.1. Définitions

- Soit  $F$  une fonction de  $n+2$  variables réelles. On appelle **équation différentielle** (ou **équation différentielle ordinaire** ou **EDO**) d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  l'équation de la forme  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  où  $y$  désigne une fonction de  $x$ , réelle (exceptionnellement complexe),  $n$  fois dérivable.  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  sont les dérivées successives de  $y$  que l'on peut aussi écrire :  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ .
- Soit  $I$  un intervalle sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ , on appelle **solution** ou **intégrale** d'une équation différentielle toute fonction  $f(x)$  telle que :  $\forall x \in I, F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$ . Résoudre ou intégrer une équation différentielle, c'est donc en déterminer toutes les solutions en précisant pour chacune d'entre elles l'intervalle sur lequel elle est définie.
- Pour obtenir une solution univoque, il faut donner à l'avance la valeur de la fonction ou de ses dérivées en un ou plusieurs points. On parle de **conditions initiales** quand on spécifie la valeur de  $y(x)$  ou de  $y'(x)$  pour  $x = 0$ . Lorsqu'on connaît cette valeur pour deux valeurs  $x_1$  et  $x_2$  on parle de **conditions aux limites**. De façon générale, il faut  $n$  conditions pour obtenir une solution unique à une équation différentielle d'ordre  $n$ .
- On appelle **courbe intégrale** d'une équation différentielle la représentation graphique d'une solution.

### V.2. Equations différentielles du premier ordre à variables séparables : $y' = g(x, y)$

Une équation différentielle  $y' = g(x, y)$  est à variables séparables si  $g$  peut se mettre sous la forme  $g(x, y) = \frac{a(x)}{b(y)}$ .

L'équation différentielle devient  $b(y)y' = a(x)$ . Si  $A$  et  $B$  sont des primitives respectives de  $a$  et  $b$ , une solution  $y$  vérifie :  $B(y) = A(x) + cte$ . Si on arrive à inverser  $B$  on pourra obtenir  $y$ . L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de traiter à la fois des problèmes linéaires et non linéaires.

**Ex :** résoudre  $y' + y = xe^x y$  avec la condition initiale  $y(0) = 1$

$$y' + y = xe^x y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = (xe^x - 1)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (xe^x - 1)dx$$

on intègre cette expression à droite et à gauche :  $\ln|y| = xe^x - e^x - x + cte$

or  $y(0) = 1 \Rightarrow cte = 1$  donc  $\ln|y| = xe^x - e^x - x + 1 \Rightarrow y(x) = \exp(xe^x - e^x - x + 1)$

**Ex :** intégrer l'équation fondamentale de l'hydrostatique  $dP = -\rho g dz$  entre l'altitude  $z_0 = 0$  et l'altitude  $z$ , la pression variant alors de  $P_0$  à  $P$

$$\text{l'équation d'état des gaz parfaits est } PV = nRT = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT}$$

$$\text{donc } dP = -\rho g dz = -\frac{MP}{RT} g dz \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{gM}{RT} dz$$

en première approximation on supposera que  $g$  et  $T$  ne dépendent pas de  $z$ .

$$\int \frac{dP}{P} = \int dz \Rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{gM}{RT} z \Rightarrow P = P_0 \exp\left(-\frac{gM}{RT} z\right)$$

### V.3. Equations différentielles linéaires

Une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  s'écrit sous la forme :

$$a_n(x) \frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Si  $g(x) = 0$  l'équation différentielle est dite **homogène** et si  $a_n(x) = a_n, a_{n-1}(x) = a_{n-1}, \dots, a_1(x) = a_1$  et  $a_0(x) = a_0$  on dit qu'elle est à **coefficients constants**. Les équations différentielles linéaires représentent un cas particulier très important pour deux raisons. D'une part, on sait résoudre ou étudier analytiquement certaines classes d'équations linéaires. D'autre part, la modélisation mathématique d'un phénomène physique conduit très souvent à une équation différentielle linéaire, au moins en première approximation.

### a) Equation différentielle linéaire d'ordre un

Elle s'écrit sous la forme  $y' + a(x)y = g(x)$  où  $a(x)$  et  $g(x)$  sont deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ . On obtient toutes les solutions avec second membre en ajoutant à une solution particulière de cette équation toutes les solutions de l'équation homogène associée.

$$\text{solution générale} = \text{solution générale de l'équation homogène} + \text{solution particulière}$$

#### • **Intégration de l'équation homogène** : $y' + a(x)y = 0$

On admet qu'en dehors de la fonction nulle, il n'existe pas de solutions comprenant la valeur 0 en un point de l'intervalle  $I$ .

$$y' + a(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

Soit  $A(x)$  une primitive de  $a(x)$  sur  $I$

$$y' + a(x)y = 0 \Leftrightarrow \ln|y| = -A(x) + cte \Leftrightarrow |y| = e^{-A(x)} \times cte \Leftrightarrow y = \lambda e^{-A(x)} = \lambda y_0(x)$$

Les solutions de l'équation homogène forment un espace vectoriel de dimension 1.

#### • **Recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle**

- parfois on devine.

- si  $y' + a(x)y = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \dots + \alpha_n g_n(x)$ , on cherche une solution particulière de  $y' + a(x)y = \alpha_i g_i(x)$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Alors  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$  est solution particulière de l'équation.

- si l'équation est à coefficients constants et  $g(x) = P_n(x)$ , on cherche une solution particulière sous forme de polynôme de degré  $n$  si  $a \neq 0$  et de degré  $n+1$  si  $a = 0$ .

- si l'équation est à coefficients constants et  $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ , on pose  $y = e^{\alpha x} z$  où  $z$  est une fonction de  $x$ .

$y = e^{\alpha x} z \Rightarrow y' = e^{\alpha x} (z' + \alpha z)$  et donc en remplaçant dans l'équation différentielle on obtient :

$$y' + ay = e^{\alpha x} P_n(x) \Leftrightarrow e^{\alpha x} (z' + \alpha z) + e^{\alpha x} az = e^{\alpha x} P_n(x) \Leftrightarrow e^{\alpha x} (z' + (\alpha + a)z) = e^{\alpha x} P_n(x) \Leftrightarrow z' + (\alpha + a)z = P_n(x)$$

On est ramené au cas précédent.

- cas général : on utilise la **méthode de variation de la constante**. On a trouvé  $y_0(x)$  la solution de l'équation homogène non nulle. On cherche une solution particulière de l'équation différentielle sous forme  $y = \lambda(x)y_0(x)$  où  $\lambda(x)$  est une nouvelle fonction inconnue.

$$y = \lambda(x)y_0(x) \Rightarrow y' = \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x)$$

$$y' + a(x)y = g(x) \Leftrightarrow \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x) + a(x)\lambda(x)y_0(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)\underbrace{[y_0'(x) + a(x)y_0(x)]}_{=0} = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x)y_0(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{g(x)}{y_0(x)}$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est donc  $y = \lambda(x)y_0(x)$ .

**Ex :** résoudre  $y' + 2y = x + x \cos x$

équation homogène :  $y' + 2y = 0 \Rightarrow y = \lambda e^{-2x}$

\* soit  $E_1$  :  $y' + 2y = x$

on pose  $y = ax + b \Rightarrow y' = a$  donc  $y' + 2y = x \Leftrightarrow a + 2(ax + b) = x \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$  et  $b = -\frac{1}{4}$

$$\text{alors } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

$$* \text{ soit } E_2 : y' + 2y = x \cos x$$

$$\text{soit } e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$E_2$  est la partie réelle de l'équation différentielle  $y' + 2y = x e^{ix}$

$$\text{on pose } y = e^{ix} z \Rightarrow y' = e^{ix} (z' + iz)$$

$$\text{donc } y' + 2y = x e^{ix} \Leftrightarrow e^{ix} (z' + iz) + 2e^{ix} z = x e^{ix} \Leftrightarrow z' + (i+2)z = x$$

$$\text{on pose } z = ax + b \Rightarrow z' = a$$

$$\text{donc } z' + (i+2)z = x \Leftrightarrow a + (i+2)(ax+b) = x \Leftrightarrow \begin{cases} a(i+2) = 1 \\ a+b(i+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5} \\ b = -\frac{1}{3+4i} = \frac{4i-3}{25} \end{cases}$$

$$\text{alors } y = e^{ix} \left( \frac{2-i}{5}x + \frac{4i-3}{25} \right) = (\cos x + i \sin x) \left( \frac{2-i}{5}x + \frac{4i-3}{25} \right) = \frac{\cos x + i \sin x}{25} (10x - 3 + i(4 - 5x))$$

$$\text{donc la solution est } \Re(y) = \frac{\cos x}{25} (10x - 3) + \frac{\sin x}{25} (5x - 4)$$

$$* \text{ la solution générale est } y = \lambda e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\cos x}{25} (10x - 3) + \frac{\sin x}{25} (5x - 4)$$

**Ex :** résoudre  $(x-1)y' + (x-2)y = x(x-1)^2$

en supposant  $x \neq 1$ , on transforme cette équation différentielle en  $y' + \frac{x-2}{x-1}y = x(x-1)$

$$\text{équation homogène : } y' + \frac{x-2}{x-1}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{x-2}{x-1}dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \left[ -1 + \frac{1}{x-1} \right] dx \Rightarrow \ln|y| = -x + \ln|x-1| + cte$$

donc la solution générale de l'équation homogène est :  $y = \lambda(x-1)e^{-x}$

$$\text{méthode de variation de la constante : } y = \lambda(x)(x-1)e^{-x} \Rightarrow y' = \lambda'(x)(x-1)e^{-x} + \lambda(x)(2-x)e^{-x}$$

$$\text{donc } y' + \frac{x-2}{x-1}y = x(x-1) \Leftrightarrow \lambda'(x)(x-1)e^{-x} = x(x-1) \Leftrightarrow \lambda'(x) = xe^x \Leftrightarrow \lambda(x) = (x-1)e^x \text{ en posant } cte = 0$$

une solution particulière de l'équation est donc  $y = (x-1)^2$

une solution générale de l'équation différentielle est donc :  $y = \lambda(x-1)e^{-x} + (x-1)^2$

### b) Equation différentielle linéaire d'ordre deux

Elle s'écrit sous la forme  $y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$  où  $a(x)$ ,  $b(x)$  et  $g(x)$  sont trois fonctions continues sur un intervalle  $I$ . On obtient toutes les solutions avec second membre en ajoutant à une solution particulière de cette équation toutes les solutions de l'équation homogène associée.

$$\text{solution générale} = \text{solution générale de l'équation homogène} + \text{solution particulière}$$

- **Equation différentielle à coefficients constants sans second membre** :  $y'' + ay' + by = 0$

L'ensemble des solutions constitue un sous-espace vectoriel de dimension 2, c'est-à-dire que si  $y_1$  et  $y_2$  sont deux solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation homogène, la solution générale de l'équation homogène est de la forme :  $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ .  $y_1$  et  $y_2$  étant linéairement indépendantes, le rapport  $y_2/y_1$  n'est pas constant. Effectuons un changement de fonction inconnue en prenant  $z$  tel que :

$$y = y_1 z \Rightarrow y' = y_1' z + y_1 z' \Rightarrow y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$$

Si  $y$  est solution de l'équation homogène, alors  $z$  est solution de l'équation différentielle

$$\Rightarrow y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' + a(y_1' z + y_1 z') + b y_1 z = 0$$

$$\Rightarrow y_1 z'' + (2y_1' + a y_1) z' + \underbrace{(y_1'' + a y_1' + b y_1)}_{=0} z = 0$$

$$\Rightarrow y_1 z'' + (2y_1' + a y_1) z' = 0$$

On fait un changement de fonction inconnue en posant  $Z = z'$ . Dire que  $z$  est solution de cette équation homogène équivaut à dire que  $Z$  est solution de  $y_1 Z' + (2y_1' + ay_1)Z = 0$ . Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène. Une solution particulière de  $y_1 z'' + (2y_1' + ay_1)z' = 0$  est  $z_0 = y_2/y_1$ , donc une solution particulière de cette équation homogène est  $Z_0 = (y_2/y_1)'$ . Comme le rapport  $y_2/y_1$  n'est pas constant, sa dérivée n'est pas la fonction nulle. Donc la solution générale est  $Z = \lambda Z_0 = \lambda (y_2/y_1)'$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow z' = \lambda (y_2/y_1)' \Rightarrow z = \lambda (y_2/y_1) + \mu \Rightarrow y = \lambda y_2 + \mu y_1 \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme  $y = e^{rx} \Rightarrow y' = r e^{rx} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rx}$ . Elle est solution de l'équation homogène si et seulement si  $e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0$  soit encore  $r^2 + ar + b = 0$ . Il s'agit de l'**équation caractéristique associée** à l'équation différentielle.

\* si  $\Delta = a^2 - 4b > 0 \Rightarrow$  deux racines réelles  $r_1$  et  $r_2$

$y_1 = e^{r_1 x}$  et  $y_2 = e^{r_2 x}$  sont deux solutions particulières de l'équation homogène et  $y_2/y_1 = e^{(r_2 - r_1)x}$  n'est pas constant. Donc une solution générale est  $y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$

\* si  $\Delta = a^2 - 4b < 0 \Rightarrow$  deux racines complexes conjuguées  $r_1 = \alpha + i\beta$  et  $r_2 = \alpha - i\beta$

$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$  et  $y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$  sont deux solutions particulières de l'équation homogène. Soit  $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$  et  $y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$  deux solutions particulières réelles de cette même équation, telles que  $y_4/y_3 = \tan \beta x$  n'est pas constant. Donc une solution générale est  $y = e^{\alpha x} (\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$

\* si  $\Delta = a^2 - 4b = 0 \Rightarrow$  une racine double réelles  $r$

$y_1 = e^{rx}$  est une solution particulière de l'équation homogène. Montrons que  $y_2 = x e^{rx}$  est une autre solution particulière :  $y_2 = x e^{rx} \Rightarrow y_2' = e^{rx}(rx + 1) \Rightarrow y_2'' = e^{rx}(r^2 x + 2r)$ .

$$\text{Alors } y_2'' + a y_2' + b y_2 = e^{rx}(r^2 x + 2r) + a e^{rx}(rx + 1) + b x e^{rx} = e^{rx} \left( \underbrace{(r^2 + ar + b)}_{=0} x + \underbrace{2r + a}_{=0} \right) = 0$$

De plus  $y_2/y_1 = x$  n'est pas constant. Donc une solution générale est  $y = e^{rx} (\lambda x + \mu)$

remarque : on peut aussi parler d'équation caractéristique pour une équation du premier ordre. Considérons l'équation différentielle  $y' + ay = 0$  qui a pour équation caractéristique  $r + a = 0$  dont la solution est  $r = -a$ . Alors

$$y_1 = e^{rx} = e^{-ax} \text{ est une solution particulière et la solution générale est de la forme } y = \lambda e^{-ax}$$

- **Equation différentielle à coefficients constants de la forme**  $y'' + ay' + by = P_n(x)$

On cherche une solution particulière sous forme de polynôme de degré  $n$ .

- **Equation différentielle à coefficients constants de la forme**  $y'' + ay' + by = A e^{\alpha x}$

\* si  $\alpha$  n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme :

$$y = \lambda e^{\alpha x} \Rightarrow y' = \lambda \alpha e^{\alpha x} \Rightarrow y'' = \lambda \alpha^2 e^{\alpha x}$$

$$\text{Donc } \lambda e^{\alpha x} (\alpha^2 + a\alpha + b) = A e^{\alpha x} \Rightarrow \lambda (\alpha^2 + a\alpha + b) = A \Rightarrow \lambda = \frac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b}$$

Ce résultat est valable pour une équation du premier ordre.

\* si  $\alpha$  est une racine simple de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme :

$$y = \lambda x e^{\alpha x} \Rightarrow y' = \lambda (\alpha x + 1) e^{\alpha x} \Rightarrow y'' = \lambda (\alpha^2 x + 2\alpha) e^{\alpha x}$$

$$\text{Donc } \lambda e^{\alpha x} \left( (\alpha^2 x + 2\alpha) + a(\alpha x + 1) + bx \right) = A e^{\alpha x} \Rightarrow \lambda \left( \underbrace{(\alpha^2 + a\alpha + b)}_{=0} x + 2\alpha + a \right) = A \Rightarrow \lambda = \frac{A}{2\alpha + a}$$

Ce résultat est valable pour une équation du premier ordre.

\* si  $\alpha$  est une racine double de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme :

$$y = \lambda x^2 e^{\alpha x} \Rightarrow y' = \lambda(\alpha x^2 + 2x) e^{\alpha x} \Rightarrow y'' = \lambda(\alpha^2 x^2 + 4\alpha x + 2) e^{\alpha x}$$

$$\text{Donc } \lambda e^{\alpha x} \left[ (\alpha^2 x^2 + 4\alpha x + 2) + a(\alpha x^2 + 2x) + bx^2 \right] = A e^{\alpha x} \Rightarrow \lambda \left[ \underbrace{(\alpha^2 + a\alpha + b)}_{=0} x^2 + \underbrace{2(2\alpha + a)}_{=0} x + 2 \right] = A \Rightarrow \lambda = \frac{A}{2}$$

Ce résultat est valable pour une équation du premier ordre.

**Ex :** résoudre  $y'' - 2y' + y = 6e^x$

équation caractéristique  $r^2 - 2r + 1 = 0$  ayant une racine double 1. Une solution générale de l'équation homogène est de la forme  $y = e^x (\lambda_1 x + \lambda_2)$  et une solution particulière de l'équation avec second membre est de la forme

$$y = \lambda x^2 e^x \Rightarrow y' = \lambda(x^2 + 2x) e^x \Rightarrow y'' = \lambda(x^2 + 4x + 2) e^x$$

$$y'' - 2y' + y = 6e^x \Rightarrow \lambda = 3$$

donc la solution générale de l'équation avec second membre est  $y = e^x (3x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2)$

• **Equation différentielle à coefficients constants de la forme**  $y'' + ay' + by = \alpha \cos kx + \beta \sin kx$

$$\text{On pose } \cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \text{ et } \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$y'' + ay' + by = \alpha \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + \beta \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2i} \right) e^{ikx} + \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i} \right) e^{-ikx} = \alpha' e^{ikx} + \beta' e^{-ikx}$$

On se ramène à la situation précédente où le second membre est une exponentielle.

\* si  $\pm ik$  ne sont pas racines de l'équation caractéristique, une solution particulière est de la forme :

$$\lambda e^{ikx} + \mu e^{-ikx} = \lambda(\cos kx + i \sin kx) + \mu(\cos kx - i \sin kx) = (\lambda + \mu) \cos kx + i(\lambda - \mu) \sin kx = \lambda' \cos kx + \mu' \sin kx$$

\* si  $\pm ik$  sont racines de l'équation caractéristique, une solution particulière est de la forme :

$$x(\lambda e^{ikx} + \mu e^{-ikx}) \text{ soit encore } x(\lambda' \cos kx + \mu' \sin kx).$$

**Ex :** résoudre  $2y' + 3y = \cos^2 2x$

équation caractéristique  $2r + 3 = 0$  ayant une racine réelle simple  $r = -3/2$ . Une solution générale de l'équation

homogène est de la forme  $y = \lambda e^{-3/2x}$ . On peut écrire que  $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \Rightarrow$

$$2y' + 3y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x$$

\* seconde membre =  $\frac{1}{2}$  : solution particulière  $y = \frac{1}{6}$

\* seconde membre =  $\frac{1}{2} \cos 4x$  : solution particulière de la forme  $y = A \cos 4x + B \sin 4x$  car  $\pm 4i$  n'est pas racine de l'équation caractéristique.

$$y = A \cos 4x + B \sin 4x \Rightarrow y' = -4A \sin 4x + 4B \cos 4x$$

$$2y' + 3y = \frac{1}{2} \cos 4x \Rightarrow 2(-4A \sin 4x + 4B \cos 4x) + 3(A \cos 4x + B \sin 4x) = \frac{1}{2} \cos 4x \Rightarrow \begin{cases} 8B + 3A = \frac{1}{2} \\ 3B - 8A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{146} \\ B = \frac{4}{73} \end{cases}$$

donc la solution générale de l'équation avec second membre est  $y = \lambda e^{-3/2x} + \frac{1}{6} + \frac{3}{146} \cos 4x + \frac{4}{73} \sin 4x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Ex :** résoudre  $y'' - 2y' + 5y = 10 \cos x$

équation caractéristique  $r^2 - 2r + 5 = 0$  ayant deux racines complexes conjuguées  $r = 1 \pm 2i$ . Une solution générale de l'équation homogène est de la forme  $y = e^x (\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$  et une solution particulière de l'équation avec second membre est de la forme  $y = A \cos x + B \sin x$  car  $\pm i$  n'est pas racine de l'équation caractéristique.

$$y = A \cos x + B \sin x \Rightarrow y' = -A \sin x + B \cos x \Rightarrow y'' = -A \cos x - B \sin x$$

$$y'' - 2y' + 5y = 10 \cos x \Rightarrow (-A \cos x - B \sin x) - 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 10 \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A - 2B = 10 \\ 2A + 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

donc la solution générale de l'équation avec second membre est  $y = 2 \cos x - \sin x + e^x (\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

**Ex :** résoudre  $y'' + 4y = \sin 2x + 3 \cos 2x$

équation caractéristique  $r^2 + 4 = 0$  ayant deux racines complexes conjuguées  $r = \pm 2i$ . Une solution générale de l'équation homogène est de la forme  $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$  et une solution particulière de l'équation avec second membre est de la forme  $y = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$  car  $\pm i$  est racine de l'équation caractéristique.

$$y = x(A \cos 2x + B \sin 2x) \Rightarrow y' = A \cos 2x + B \sin 2x + x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)$$

$$\Rightarrow y'' = -4A \sin 2x + 4B \cos 2x - 4Ax \cos 2x - 4Bx \sin 2x$$

$$y'' + 4y = \sin 2x + 3 \cos 2x \Rightarrow A = -\frac{1}{4} \text{ et } B = \frac{3}{4}$$

donc la solution générale de l'équation avec second membre est  $y = -\frac{1}{4}x \cos 2x + \frac{3}{4}x \sin 2x + \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

• **Equation différentielle à coefficients non constants de la forme**  $y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$

Une méthode de résolution existe si l'on connaît une solution particulière de l'équation homogène, soit  $y_0(x)$ . On

pose alors  $y = z(x)y_0(x) \Rightarrow y' = z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x) \Rightarrow y'' = z''(x)y_0(x) + 2z'(x)y_0'(x) + z(x)y_0''(x)$

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x) \Leftrightarrow (z''y_0 + 2z'y_0' + zy_0'') + a(z'y_0 + zy_0') + bzy_0 = g$$

$$\Leftrightarrow z''y_0 + z'(2y_0' + ay_0) + \underbrace{z(y_0'' + ay_0' + by_0)}_{=0} = g \Leftrightarrow z''y_0 + z'(2y_0' + ay_0) = g$$

On pose  $z' = u$  et on se ramène à une équation du premier ordre.

**Ex :** résoudre  $x^2y'' - xy' + y = x$

équation homogène :  $x^2y'' - xy' + y = 0$  dont une solution particulière est  $y = x$

on pose  $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z \Rightarrow y'' = z''x + 2z'$

$$x^2y'' - xy' + y = x \Leftrightarrow x^2(z''x + 2z') - x(z'x + z) + zx = x \Leftrightarrow x^2z'' + xz' = 1$$

$$\text{on pose } z' = u \Rightarrow x^2u' + xu = 1 \Rightarrow u' + \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{équation homogène : } u' + \frac{1}{x}u = 0 \Rightarrow \frac{u'}{u} = -\frac{1}{x} \Rightarrow u = \frac{\lambda}{x}$$

$$\text{méthode de variation de la constante : } u' = \frac{\lambda'}{x} - \frac{\lambda}{x^2}$$

$$u' + \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{\lambda'}{x} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \lambda = \ln|x|$$

donc une solution particulière est  $u = \frac{\ln|x|}{x}$  et la solution générale est :

$$u = \frac{\lambda}{x} + \frac{\ln|x|}{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\lambda}{x} + \frac{\ln|x|}{x} \Rightarrow z = \lambda \ln|x| + \frac{1}{2} \ln^2|x| + \mu \Rightarrow y = \lambda x \ln|x| + \frac{x}{2} \ln^2|x| + \mu x$$

#### V.4. Equations différentielles non linéaires

Elles sont généralement assez mal connues sur le plan mathématique d'où l'utilisation de méthodes numériques pour les résoudre et la simulation pour connaître leur comportement. Quelques unes cependant peuvent se ramener à des formes simples.

##### a) Equation de Bernoulli

Elle fut proposée à la résolution en 1695 par le mathématicien et physicien suisse Jacques Bernoulli (1654-1705). Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre, non linéaire, de la forme :  $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Lorsque  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$ , une telle équation est linéaire. Pour  $\alpha \neq 0$  ou 1, on peut s'arranger pour qu'elle le devienne en introduisant le changement de variable  $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ . L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{1}{1-\alpha}y^\alpha z' + a(x)zy^\alpha = b(x)y^\alpha \Leftrightarrow z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x)$$

On retrouve une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on sait résoudre.

**Ex :** résoudre  $x^2yy' - xy^2 = 1$

on transforme cette expression en  $x^2yy' - xy^2 = 1 \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = \frac{y^{-1}}{x^2}$ . Il s'agit d'une équation de Bernoulli avec

$a(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $b(x) = \frac{1}{x^2}$  et  $\alpha = -1$ . On introduit donc la nouvelle variable  $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$  et on obtient :

$$\frac{1}{2y}z' - \frac{1}{xy}z = \frac{1}{x^2y} \Leftrightarrow z' - \frac{2}{x}z = \frac{2}{x^2}$$

solution générale de l'équation homogène :  $z' - \frac{2}{x}z = 0 \Rightarrow z' = \frac{2}{x}z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2}{x}dx \Rightarrow z = \lambda x^2$

solution particulière par la méthode de variation de la constante :

$$z = \lambda(x)x^2 \Rightarrow z' = \lambda'(x)x^2 + 2\lambda(x)x$$

$$\text{donc } z' - \frac{2}{x}z = \frac{2}{x^2} \Rightarrow \lambda'(x)x^2 + 2\lambda(x)x - \frac{2}{x}\lambda(x)x^2 = \frac{2}{x^2} \Rightarrow \lambda'(x) = \frac{2}{x^4} \Rightarrow \lambda(x) = -\frac{2}{3x^3}$$

$$\text{la solution générale de l'équation en } z \text{ s'écrit : } z = \lambda x^2 - \frac{2}{3x} \Rightarrow y^2 = \lambda x^2 - \frac{2}{3x}$$

##### b) Equation de Riccati

Elle porte ce nom en l'honneur du physicien et mathématicien italien Jacopo Riccati (1676-1754) dont les travaux sur l'hydraulique et l'acoustique l'on conduit à résoudre des équations de la forme  $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$  avec  $a(x)$ ,  $b(x)$  et  $c(x)$  trois fonctions généralement choisies continues à valeurs réelles sur un intervalle commun. Il existe une méthode de résolution dès que l'on en connaît une solution particulière  $y_0$  : on pose  $z = y - y_0 \Rightarrow z' = y' - y_0'$ . L'équation différentielle s'écrit alors :

$$z' + y_0' = a(x)(z + y_0)^2 + b(x)(z + y_0) + c(x)$$

Or  $y_0' = a(x)y_0^2 + b(x)y_0 + c(x) \Rightarrow z' = a(x)(z^2 + 2zy_0) + b(x)z \Rightarrow z' - (2a(x)y_0 + b(x))z = a(x)z^2$  qui est une équation de Bernoulli que l'on sait résoudre. On rencontre des équations de Riccati en physique quantique dans des problèmes portant sur l'équation de Schrödinger, dans l'équation des ondes, ou bien encore dans l'équation de la propagation de la chaleur en régime sinusoïdal.

### c) Equation de Lagrange

On appelle équation de Lagrange une équation du type :  $y + a(y')x + b(y') = 0$ . Si l'on pose  $z = y'$  l'équation devient  $y + a(z)x + b(z) = 0$ . Dérivons par rapport à  $x$  :

$$y' + a(z) + a'(z)z'x + b'(z)z' = 0 \Rightarrow z + a(z) + (xa'(z) + b'(z))z' = 0 \Rightarrow (z + a(z))\frac{dx}{dz} + (xa'(z) + b'(z)) = 0$$

On obtient une équation linéaire du premier ordre, que l'on sait résoudre, et l'on trouve  $z$ . L'**équation de Clairaut** est un cas particulier de l'équation de Lagrange qui s'écrit sous la forme :  $y + y'x + b(y') = 0$ .

### V.5. Equations aux dérivées partielles

Elles constituent la généralisation des équations différentielles ordinaires au cas des fonctions de plusieurs variables et sont apparues pour la première fois sur la plume du mathématicien et philosophe français Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Considérons la fonction  $u(x,t)$  de deux variables indépendantes. L'équation aux dérivées partielles du

deuxième ordre  $c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$  est parmi les plus fréquemment rencontrées en physique car elle décrit la propagation d'ondes et la constante  $c$  correspond à la vitesse de propagation.

## VI. Les suites réelles

### VI.1. Définitions

- On appelle **suite** sur  $R$  toute application de  $N$  sur  $R$ . On écrit  $v(n) = u_n$ .  $u_n$  peut être donnée en fonction de  $n$  ou être définie par une **relation de récurrence** :  $u_n = f(u_{n-1})$  ou  $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2})$ .
- Une suite **croissante** ou **décroissante** au sens large ou strict est dite **monotone**. Pour étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$ . S'il s'agit d'une suite à termes positifs, on compare le rapport  $u_{n+1}/u_n$  à 1.
- La suite de terme général  $u_n$  est dite **majorée** (ou **minorée**) s'il existe un réel  $M$  (ou  $m$ ) tel que  $\forall n \in N, u_n < M$  (ou  $u_n > m$ ).  $M$  (ou  $m$ ) est appelé un **majorant** (ou un **minorant**) de la suite. L'ensemble des réels  $u_n$  admet une borne supérieure (ou inférieure) appelée borne supérieure (ou inférieure) de la suite. Une suite majorée et minorée est dite **bornée**.
- On dit que la suite de terme général  $u_n$  est **convergente** si elle admet pour limite unique  $\ell$  :  $u_n \rightarrow \ell$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

### VI.2. Suite définie par une relation de récurrence d'ordre 1

On part de  $u_n = f(u_{n-1})$  avec  $u_0$  donné. Si la fonction  $f$  est continue, les limites possibles de cette suite sont les solutions de l'équation  $\ell = f(\ell)$ . Pour voir les propriétés de la suite, on peut construire la courbe d'équation  $y = f(x)$  : la limite est le point d'intersection entre la courbe et la bissectrice.

**Ex :** calculer la limite de la suite  $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$  avec  $u_0 > -2$

on cherche les limites possibles : s'il en existe une notée  $\ell$ , elle sera solution de l'équation  $\ell = \sqrt{2 + \ell}$   
 $\Rightarrow \ell^2 = 2 + \ell \Rightarrow \ell = -1$  ou  $\ell = 2$ . Or la suite est positive donc  $\ell = 2$

**Ex :** soit la suite  $u_n = (u_{n-1} - 6)/(u_{n-1} - 4)$  avec  $u_0$  donné et choisi de telle sorte que  $u_0 \neq 4$

1) rechercher les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ) pour lesquelles la suite est constante

$\alpha = 2$  et  $\beta = 3$

2) en supposant que  $u_0$  est différent de  $\alpha$  et  $\beta$ , calculer  $v_n = (u_n - \alpha)/(u_n - \beta)$  et montrer que  $v_n$  est une suite géométrique

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$$



3) en déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $v_0$  et  $n$ , et calculer la limite de la suite quand  $n \rightarrow +\infty$

$$u_n = \left( 2 - 3 \left( \frac{1}{2} \right)^n v_0 \right) / \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n v_0 \right) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$$

**Cas particulier :**  $u_n = a u_{n-1} + b$

La seule limite possible est  $\ell = a \ell + b \Rightarrow \ell(1-a) = b$

- si  $a \neq 1$  alors  $\ell = b/(1-a)$

$$\left. \begin{array}{l} u_n = a u_{n-1} + b \\ \ell = a \ell + b \end{array} \right\} \Rightarrow u_n - \ell = a(u_{n-1} - \ell)$$

$$\Rightarrow v_n = a v_{n-1} \text{ en posant } v_n = u_n - \ell$$

$$\Rightarrow v_n = a^n v_0$$

on obtient une **suite géométrique** qui converge vers 0 si  $|a| < 1$ , vers  $+\infty$  si  $|a| > 1$ , ou qui n'a pas de limite si  $a = -1$

- si  $a = 1$  alors  $u_n = u_{n-1} + b$

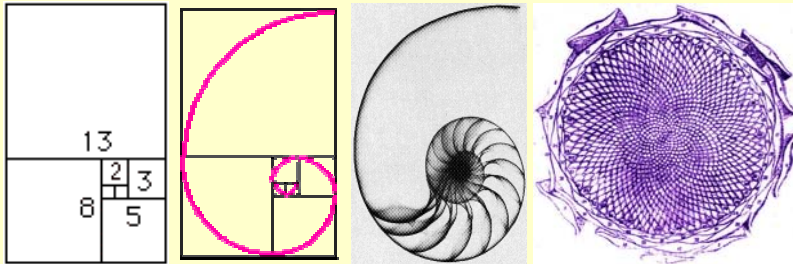
on obtient une **suite arithmétique** :  $u_n = u_{n-1} + b = u_{n-2} + 2b = u_0 + nb$

### VI.3. Suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2

On part de  $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$  avec  $u_0$  et  $u_1$  donnés. Par récurrence, cette suite est entièrement déterminée. On définit le **polynôme caractéristique** de la suite  $r^{n+2} = a r^{n+1} + b r^n \Rightarrow r^2 - a r - b = 0$  dont le discriminant est  $\Delta = a^2 + 4b$ .

- si le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$  alors  $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
- si le polynôme caractéristique admet une racine double  $r = a/2$  alors  $u_n = (\lambda + \mu n) r^n$
- si le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées  $r_1 = \rho e^{i\theta}$  et  $r_2 = \rho e^{-i\theta}$  alors  $u_n = (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta) \rho^n$

**Ex :** analyser la suite de Fibonacci (1170-1250) définie par  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  avec  $u_1 = u_2 = 1$



spirale de Fibonacci ou spirale logarithmique

on calcule les racines de  $r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$u_n$  est de la forme  $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ . On détermine  $\lambda$  et  $\mu$  en posant la relation de récurrence pour  $n=1$  et  $n=2$ .

$$\begin{cases} u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \\ u_2 = \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et } \mu = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et donc } u_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Les termes de cette suite sont appelés nombres de Fibonacci et  $r_1$  est le nombre d'or.

**Ex :** analyser la suite  $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$  avec  $u_0 = 2$  et  $u_1 = 1$

on calcule les racines de  $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

$u_n$  est de la forme  $u_n = (\lambda + \mu n) 1^n$ . On détermine  $\lambda$  et  $\mu$  en posant cette expression pour  $u_0$  et  $u_1$  et on trouve  $u_n = 2 - n$ .

## VII. Séries numériques et séries entières

### VII.1. Séries numériques

- Soit une suite réelle de terme général  $u_n$ . On lui associe la nouvelle suite  $S_n$  définie par  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . On appelle **série de terme général**  $u_n$  le couple formé par ces deux suites.
- Etudier la série  $\sum u_n$ , c'est chercher si  $S_n$  a une limite finie ou non quand  $n \rightarrow \infty$ . Si  $S_n$  tend vers une limite finie  $S$  quand  $n \rightarrow \infty$ , on dit que la série est **convergente** et a pour somme  $S$ . Si  $S_n$  n'a pas de limite finie quand  $n \rightarrow \infty$ , on dit que la série est **divergente**. Il existe deux sortes de divergences : divergence de **première espèce** si  $S_n \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$  et divergence de **seconde espèce** si  $S_n$  n'a pas de limite quand  $n \rightarrow \infty$ .
- Une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que la série  $\sum u_n$  soit convergente est que  $u_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Si  $u_n$  ne tend pas vers 0, la série est divergente ; si  $u_n$  tend vers 0, on ne peut rien dire.
- On ne change pas la nature d'une série en supprimant un nombre aussi grand que l'on veut mais fini de termes au début de la série.
- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , les séries  $\sum u_n$  et  $\sum \lambda u_n$  sont de même nature.
- La somme de deux séries convergentes est convergente ; la somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente ; on ne peut rien dire sur la somme de deux séries divergentes.
- **Théorème** : pour qu'une série  $\sum u_n$  à **termes positifs** soit convergente, il faut et il suffit que la suite  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  soit majorée.
- **Théorème** : la série de Riemann  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  avec  $n \neq 0$  est convergente si  $\alpha > 1$  et divergente si  $\alpha \leq 1$ . On sait calculer explicitement la somme de la série de Riemann pour tout  $\alpha$  entier pair (supérieur ou égal à 2). Par exemple  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$  ou  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$ .
- **Règle de Cauchy** : soit une série  $\sum u_n$  à **termes positifs**. Si  $\sqrt[n]{u_n}$  tend vers une limite inférieure ou égale à 1 quand  $n \rightarrow \infty$ , alors la série est convergente ; si cette limite est supérieure à 1 et finie, ou infinie, alors la série est divergente.
- **Règle de d'Alembert** : soit une série  $\sum u_n$  à **termes positifs**. Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  tend vers une limite inférieure ou égale à 1 quand  $n \rightarrow \infty$ , alors la série est convergente ; si cette limite est supérieure à 1 et finie, ou infinie, alors la série est divergente.

**Ex :** nature de la série de terme général  $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  pour  $n \neq 0$

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$$

soit  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) - \ln 1 \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$  donc la série est divergente.

**Ex :** nature de la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$  pour  $n \neq 0$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

soit  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$

donc la série est convergente et a pour somme 1.

### VII.2. Séries entières

#### a) Définitions

- Une **série entière** est une série de terme général  $u_n(x) = a_n x^n$  avec  $x \in R$  et  $a_n$  une suite dans  $R$ . Alors  $S_n(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$  est un polynôme de degré  $n$ .
- Cas particulier :  $S_n(0) = u_0$  donc au point 0 la série est toujours convergente.
- Cas particulier où le terme général est une **suite géométrique** :  $u_n(x) = ax^n \Rightarrow S_n = a + ax + ax^2 + \dots + ax^n$ . En multipliant  $S_n$  par  $x$  et en faisant la différence  $S_n - xS_n$  on obtient :  $S_n(1-x) = a(1-x^{n+1})$ .

1<sup>er</sup> cas : si  $x \neq 1$  alors  $S_n = a \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

si  $|x| < 1, x^{n+1} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  et  $S_n \rightarrow \frac{a}{1-x}$  : la série est convergente et a pour somme  $\frac{a}{1-x}$ .

si  $|x| > 1, x^{n+1} \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$  et  $S_n \rightarrow \infty$  : la série est divergente de première espèce.

si  $x = -1, x^{n+1} \rightarrow 1$  ou  $-1$  quand  $n \rightarrow \infty$  et  $S_n \rightarrow 0$  ou  $\frac{2a}{1-x}$  : la série est divergente de seconde espèce.

2<sup>ème</sup> cas : si  $x = 1$  alors  $S_n = (n+1)a$  donc  $S_n \rightarrow \infty$  : la série est divergente de première espèce.

### **b) Développement en séries entières de fonctions de variable réelle**

- Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  ouvert contenant 0.  $f$  est **développable en série entière** s'il existe une série de terme général  $a_n x^n$ , convergente  $\forall x \in ]-R, R[$  et ayant pour somme  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

- Si  $f$  est développable en série entière, alors  $\exists R > 0$  tel que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $]-R, R[$ .

- Si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $]-R, R[$  et si  $f$  est développable en série entière, alors  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

- Si  $f$  est indéfiniment dérivable en 0, alors la série entière de terme général  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  s'appelle la **série de Taylor**

de  $f$ :  $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$  avec  $R_n(x)$  le **reste d'ordre  $n$** .

- Pour qu'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 soit développable en série entière, il faut et il suffit que le reste d'ordre  $n$  de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à  $f$  sur  $[0, x]$  tende vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$

- Si  $f$  est de classe  $C^\infty$ , alors  $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  est une série entière de même **rayon de convergence**.

- Quelques exemples :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \text{ pour } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots \text{ pour } |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \text{ pour } |x| < 1$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \dots \text{ pour } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \text{ pour } |x| < 1$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \text{ pour } |x| < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \text{ pour } R = \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \text{ pour } R = \infty$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ pour } R = \infty$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ pour } R = \infty$$

$$\cosh x = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \text{ pour } R = \infty$$

$$\sinh x = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \text{ pour } R = \infty$$

**Ex :** développer en série entière  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  pour  $|x| < 1$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$$

on peut montrer que  $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!$

$$\text{donc } f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

**Ex :** développer en série entière  $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$  pour  $|x| < 1$

en remarquant que  $f(x) = \frac{x^3 + 2}{(x+1)^3} = A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$ , on détermine  $A, B, C$  et  $D$  par identification.

$$A = 1, B = -3, C = 3 \text{ et } D = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{3}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$$

on développe les fractions rationnelles en séries entières :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} x^{n+1} + (-1)^{n+2} x^{n+2} + \dots$$

en dérivant cette expression, on obtient :

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \dots + (-1)^{n+1} (n+1)x^n + (-1)^{n+2} (n+2)x^{n+1} + \dots$$

idem pour cette expression :

$$\frac{2}{(1+x)^3} = 2 - 6x + \dots + (-1)^{n+2} (n+1)(n+2)x^n + \dots$$

$$\text{donc } f(x) = 2 - 6x + \dots + (-1)^n \left[ -3 + 3(n+1) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right] x^n + \dots = 2 - 6x + \dots + (-1)^n \left( \frac{n^2 + 9n + 2}{2} \right) x^n + \dots$$

$$= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n^2 + 9n + 2}{2} \right) x^n$$

### VII.3. Séries de Fourier

Il est parfois nécessaire de savoir développer une fonction en série trigonométrique, par exemple pour résoudre un problème aux limites (voir l'équation de la chaleur).

- Une fonction  $f$  est dite **périodique**, de période  $P$ , si  $\forall x, f(x+P) = f(x)$  avec  $P$  une constante positive. La plus petite valeur de  $P > 0$  est la **période** de  $f$ . Les multiples de  $P$  sont eux-mêmes des périodes. Enfin, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de période  $P$ , toute combinaison linéaire de ces fonctions est une fonction périodique de période  $P$ .
- Une fonction  $f$  est dite **paire** si  $f(-x) = f(x)$  et **impaire** si  $f(-x) = -f(x)$ .

- Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[-L, L]$  et déterminée à l'extérieur de cet intervalle par  $f(x+2L) = f(x)$ , c'est-à-dire que  $f(x)$  présente une période  $2L$ . La **série de Fourier** ou **développement de Fourier** correspondant à  $f(x)$  est défini par :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \rightarrow f(x)$$

où  $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$  et  $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$  sont les **coefficients de Fourier**. On pose :

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right]$$

### a) Détermination de $a_n$

Pour déterminer  $a_n$  on multiplie  $f(x)$  par  $\cos \frac{m\pi x}{L}$  puis on intègre de  $-L$  à  $L$ .

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = A \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right)$$

\* soit  $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{L}{m\pi} \left[ \sin \frac{m\pi x}{L} \right]_{-L}^L = \frac{L}{m\pi} (\sin m\pi + \sin m\pi) = 0$

\* soit  $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left( \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} + \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \right) dx$

**si  $m \neq n$**

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{L}{2(m-n)\pi} \left[ \sin \frac{(m-n)\pi x}{L} \right]_{-L}^L + \frac{L}{2(m+n)\pi} \left[ \sin \frac{(m+n)\pi x}{L} \right]_{-L}^L \\ &= \frac{L}{2(m-n)\pi} (\sin(m-n)\pi + \sin(m-n)\pi) + \frac{L}{2(m+n)\pi} (\sin(m+n)\pi + \sin(m+n)\pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**si  $m = n$**

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \cos^2 \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left( 1 + \cos \frac{2m\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{2} [x]_{-L}^L + \frac{L}{4m\pi} \left[ \sin \frac{2m\pi x}{L} \right]_{-L}^L = L$$

\* soit  $\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left( \sin \frac{(n-m)\pi x}{L} + \sin \frac{(n+m)\pi x}{L} \right) dx$

**si  $m \neq n$**

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= -\frac{L}{2(n-m)\pi} \left[ \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} \right]_{-L}^L - \frac{L}{2(n+m)\pi} \left[ \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} \right]_{-L}^L \\ &= -\frac{L}{2(n-m)\pi} (\cos(n-m)\pi - \cos(n-m)\pi) - \frac{L}{2(n+m)\pi} (\cos(n+m)\pi - \cos(n+m)\pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**si  $m = n$**

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{2m\pi x}{L} dx = -\frac{L}{4m\pi} \left[ \cos \frac{2m\pi x}{L} \right]_{-L}^L = 0$$

Or  $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{n=1}^{n < m} X_n + X_m + \sum_{n > m}^{\infty} X_n$  donc  $\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L \Rightarrow a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx$

### b) Détermination de $b_n$

Pour déterminer  $b_n$  on multiplie  $f(x)$  par  $\sin \frac{m\pi x}{L}$  puis on intègre de  $-L$  à  $L$ .

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = A \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right)$$

On montre de même que  $\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L \Rightarrow b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx$

### c) Détermination de $A$

Pour déterminer  $a_0$  on applique la définition de  $a_n$  au rang zéro

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{L} \left( A \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \right) = 2A$$

On trouve donc  $A = a_0/2$

### d) Remarques

- Puisque  $f(x)$  est de période  $2L$ , les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  peuvent également être définis par les expressions

$$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \text{ et } b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

où  $c$  est un nombre quelconque. Dans le cas particulier où  $c = -L$ , on retrouve les expressions précédentes.

- Le terme constant  $a_0/2$  est la moyenne de  $f(x)$  sur une période.
- Si  $L = \pi$ , les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  ont des expressions particulièrement simples.
- Si  $f$  est paire, alors  $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$  est paire et  $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$  est impaire :

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \text{ et } b_n = 0 \Rightarrow a_0 + \sum a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

- Si  $f$  est impaire, alors  $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$  est impaire et  $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$  est paire :

$$a_n = 0 \text{ et } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow a_0 + \sum b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

- Un **développement en cosinus** est un développement de Fourier où seuls sont présents les termes en cosinus ; de même un **développement en sinus** est un développement de Fourier où seuls sont présents les termes en sinus. Quand on veut obtenir ce type de développement, on définit généralement  $f$  dans l'intervalle  $[0, L]$  qui représente la moitié de l'intervalle  $[-L, L]$  et on fait une **extension** sur l'autre moitié de l'intervalle  $[-L, 0]$  de façon à ce que  $f$  soit parfaitement définie : paire ( $a_n \neq 0$  et  $b_n = 0 \rightarrow$  développement en cosinus) ou impaire ( $a_n = 0$  et  $b_n \neq 0 \rightarrow$  développement en sinus).
- Remarque :  $\cos n\pi = (-1)^n$

**Ex :** développer la fonction  $\begin{cases} f(x) = -1 \text{ si } -\pi < x < 0 \\ f(x) = 1 \text{ si } 0 < x < \pi \\ f(x+2\pi) = f(x) \end{cases}$  en série de Fourier

période  $2L = 2\pi \Rightarrow L = \pi$

$a_0 = 0$  et  $a_n = 0$  car la fonction est impaire

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} [\cos nx]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

la série de Fourier correspondante est :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - \cos n\pi) \sin x = \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{4}{3\pi} \sin 3x + \dots$$

**Ex :** développer la fonction  $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } -5 < x < 0 \\ f(x) = 3 & \text{si } 0 < x < 5 \\ f(x+10) = f(x) \end{cases}$  en série de Fourier

période  $2L = 10 \Rightarrow L = 5$

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) dx = \frac{3}{5} \int_0^5 dx = 3$$

$$a_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^0 (0) \cos \frac{n\pi x}{5} dx + \frac{1}{5} \int_0^5 (3) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \int_0^5 \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3}{n\pi} \left[ \sin \frac{n\pi x}{5} \right]_0^5 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^0 (0) \sin \frac{n\pi x}{5} dx + \frac{1}{5} \int_0^5 (3) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \int_0^5 \sin \frac{n\pi x}{5} dx$$

$$= -\frac{3}{n\pi} \left[ \cos \frac{n\pi x}{5} \right]_0^5 = \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi}$$

la série de Fourier correspondante est :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{5} + b_n \sin \frac{n\pi x}{5} \right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi x}{5} + \frac{2}{\pi} \sin \frac{3\pi x}{5} + \dots$$

**Ex :** développer la fonction  $f(x) = x$  si  $0 < x < 2$  **1) en une série de sinus 2) en une série de cosinus**

1) on fait une extension impaire de  $f$  sur l'intervalle  $[-2, 2]$ . Dans ces conditions,  $2L = 4 \Rightarrow L = 2$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

on intègre par partie en posant  $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = 1 \\ dv = \sin \frac{n\pi x}{2} \Rightarrow v = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \end{cases}$

$$b_n = \frac{-2}{n\pi} \left[ x \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2}{n\pi} \left[ x \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{4}{n^2 \pi^2} \left[ \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 = \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi$$

la série de Fourier correspondante est :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right) = \frac{-4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \dots \right)$$

2) on fait une extension paire de  $f$  sur l'intervalle  $[-2, 2]$ . Dans ces conditions,  $2L = 4 \Rightarrow L = 2$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx \quad \text{et} \quad b_n = 0$$

on intègre par partie en posant  $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = 1 \\ dv = \cos \frac{n\pi x}{2} \Rightarrow v = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \end{cases}$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left[ x \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \left[ x \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{4}{n^2 \pi^2} \left[ \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 = \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1)$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = \int_0^2 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2$$

la série de Fourier correspondante est :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} + \dots \right)$$

3) les deux séries représentent  $f(x)$  sur l'intervalle  $0 < x < 2$  et la deuxième converge plus rapidement.

**Ex :** développer la fonction  $\begin{cases} f(x) = x^2 \text{ si } 0 < x < 2\pi \\ f(x+2\pi) = f(x) \end{cases}$  en série de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$$

$a_n$  et  $b_n$  sont calculés en posant leurs expressions respectives et en intégrant deux fois par partie.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{-4\pi}{n}$$

la série de Fourier correspondante est  $\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$

## VIII. Fonctions spéciales

Les fonctions spéciales sont définies de manière assez imprécise, puisqu'elles regroupent les fonctions que l'usage (ou la fréquence d'utilisation) a fini par associer à un nom. Parmi ces fonctions, on trouve un grand nombre de fonctions qui sont des solutions d'équations différentielles du second ordre, sans que cette propriété soit exclusive. Ces fonctions sont toutefois très utiles, car elles apparaissent très souvent, dès que l'on cherche à résoudre des équations différentielles du second ordre dont les coefficients ne sont pas constants. Les fonctions spéciales sont disponibles en programmation sous la forme de bibliothèques.

### VIII.1. Fonction Gamma

Historiquement, la fonction Gamma a d'abord été introduite par Euler en 1729 comme limite d'un produit :

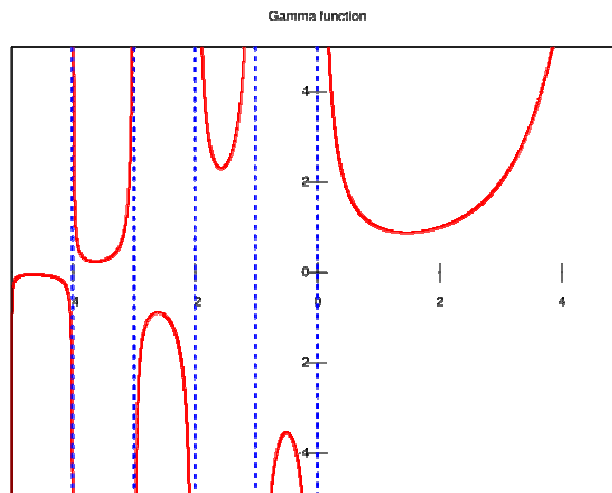
$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

Elle est aussi définie par l'intégrale suivante  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$  quand la partie réelle de  $z$  est strictement positive. Cette fonction est très importante pour les ingénieurs car elle intervient dans le calcul de nombreuses transformées de Laplace. Il existe enfin des tables qui en donnent des valeurs approchées.

**Ex :** vérifier que  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt. \text{ On fait une intégration par partie en posant } \begin{cases} u = t^z \Rightarrow du = z t^{z-1} dt \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\Gamma(z+1) = \left[ -e^{-t} t^z \right]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)$$

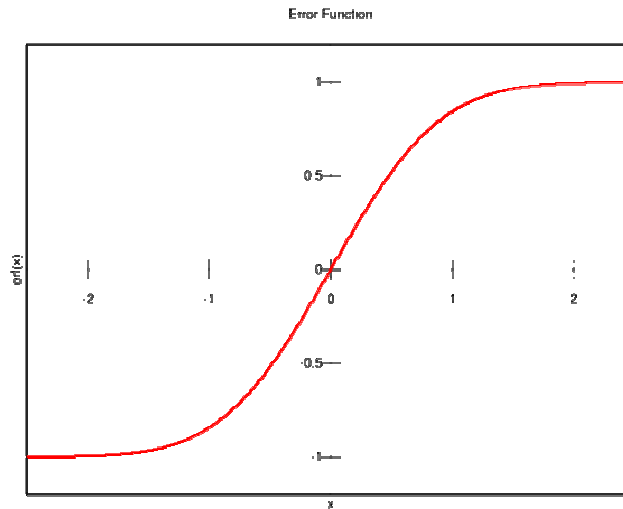




### VIII.2. Fonction erreur et fonction erreur complémentaire

La **fonction erreur** et la **fonction erreur complémentaire** sont définies comme  $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  et

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt .$$



### VIII.3. Fonction exponentielle intégrale

La fonction exponentielle intégrale  $Ei$  est définie comme  $Ei(x) = -\int_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ . Le développement en série de

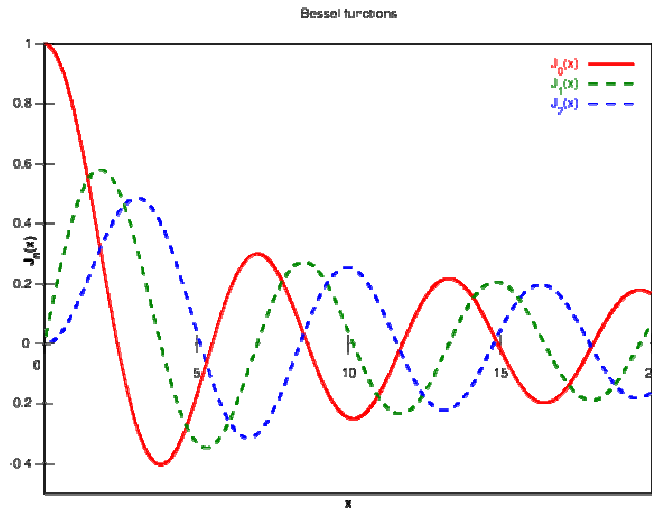
cette fonction donne  $Ei(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{nn!}$  où  $\gamma$  est la constante d'Euler-Mascheroni.

### VIII.4. Fonctions de Bessel (ou fonctions cylindriques)

Considérons l'équation différentielle du second ordre  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une des solutions de cette équation est la fonction  $u_1 = J_n(x)$  définie en zéro et connue sous le nom de **fonction de Bessel de première**

**espèce d'ordre n**. On peut l'écrire sous la forme  $J_n(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}$ . Ces fonctions satisfont les trois relations

$$\text{de récurrence } \begin{cases} J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_n'(x) \\ J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) . \text{ On en déduit } J_1(x) = -J_0'(x) \text{ et } \frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x) . \\ J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) = -2J_n'(x) \end{cases}$$



Pour trouver une solution générale de l'équation différentielle, on doit construire une deuxième solution qui est linéairement indépendante de  $J_n(x)$ . On choisit comme solution  $u_2 = Y_n(x)$  connue sous le nom **fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre  $n$** . Si  $n$  n'est pas un entier, ces fonctions sont liées par la relation suivante :

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$$

### VIII.5. Fonctions hypergéométriques gaussiennes

Les fonctions hypergéométriques gaussiennes sont définies comme étant les solutions de l'équation différentielle  $x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$  avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  des constantes. Si  $c$ ,  $a-b$  et  $c-a-b$  sont non entiers, la solution générale de cette équation est  $y = F(a, b, c; x) + Bx^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x)$  où la fonction  $F$  peut être exprimée sous forme d'une série :

$$F(a, b, c; x) \equiv {}_2F_1(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!}$$

Si  $a$ ,  $b$  ou  $c$  sont des entiers, la fonction hypergéométrique peut se réduire à une fonction transcendante plus simple. Par exemple  ${}_2F_1(1, 1, 2; x) = -x^{-1} \ln(1-x)$ .

### Références

- Ayres F., Mendelson E. (1993), *Calcul différentiel et intégral*, Série Schaum, McGraw-Hill, 484 pages.
- Beaury L., Bruneteau A.M., Régis R., Bouchriha H. (1989), *Mathématiques appliquées*, Editions Economica, 473 pages.
- Lebedev N.N. (1972), *Special functions & their applications*, Dover, 308 pages.
- Mashaal M. (1996), Les équations différentielles, *La Recherche*, 284:110-113.
- Spiegel M.R. (1974), *Formules et tables mathématiques*, Série Schaum, McGraw-Hill, 272 pages.
- Spiegel M.R. (1980), *Analyse de Fourier*, Série Schaum, McGraw-Hill, 199 pages.
- Wikipédia, le portail des mathématiques <http://fr.wikipedia.org/>