

Module "CHAMP DE PESANTEUR ET GEODESIE"

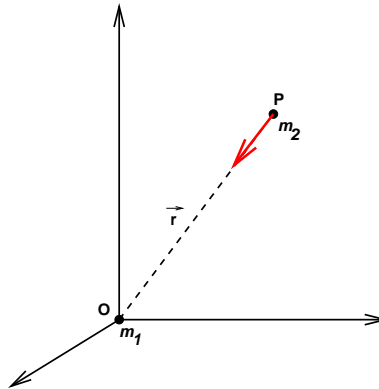
Notes de cours: Marianne Greff

Etude de l'attraction gravitationnelle de la Terre et des planètes

1 Potentiel gravitationnel

1.1 Loi de Newton pour deux masses ponctuelles

Partons de la loi de Newton: deux masses s'attirent de façon proportionnelle à leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance



Soit un repère centré en O point de masse m_1 . Soit une masse m_2 en P avec $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. La force \vec{F} s'écrit en P :

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$F_x = -G m_1 m_2 \frac{x}{r^3}; \quad F_y = -G m_1 m_2 \frac{y}{r^3}; \quad F_z = -G m_1 m_2 \frac{z}{r^3}$$

Dans la suite, on considèrera la masse $m_2 = 1$ et on parlera de l'attraction de la masse m_1 (notée m) en P :

$$\vec{A} = -\frac{Gm}{r^3} \vec{r}$$

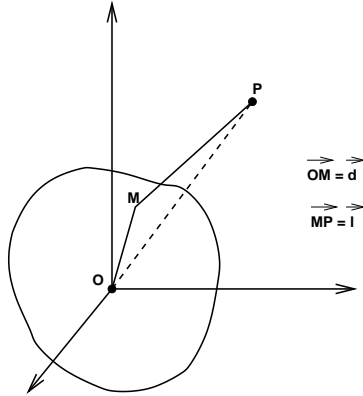
Cette attraction *dérive* d'un potentiel scalaire, noté V : On a $\vec{A} = \vec{\nabla}V$.

$$A_x = \frac{\partial V}{\partial x}; A_y = \frac{\partial V}{\partial y}; A_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

On a $V = \frac{Gm}{r}$ et $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{Gm}{r^2} \frac{x}{r} \dots$

1.2 Loi de Newton pour un milieu continu

On peut généraliser la loi de Newton à un milieu continu.



Soit un petit volume dv entourant le point M , de densité ρ : on a une masse $dm = \rho dv$. Cette masse crée un potentiel dV en P tel que:
 $dV(P) = G \frac{dm}{l}$ avec $\vec{MP} = \vec{l}$.

Pour le potentiel total en P , on fait la somme de toutes les masses du volume V (Attention !!! l change).

Si on note

$$\vec{OM} = \vec{d}, \vec{MP} = \vec{l} \text{ et } \vec{OP} = \vec{r}, \text{ avec } \vec{d} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } \vec{l} = \vec{r} - \vec{d} \Rightarrow l = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

$$V(P) = G \iiint_V \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}$$

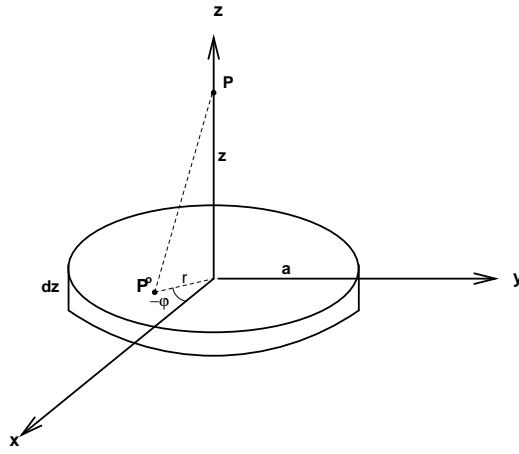
1.3 Exemple

Attraction gravifique créée par un disque homogène de densité ρ , de rayon a , d'épaisseur dz .

Le point P^o , de masse $\rho ds dz = \rho r dr d\varphi dz$ produit en P un potentiel gravifique $dV_P = \frac{G\rho}{l} r dr d\varphi dz$ avec $l^2 = r^2 + z^2$.

\Rightarrow le disque produit en P un potentiel $V(P)$ tel que:

$$\begin{aligned} V(P) &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{G\rho r dr d\varphi dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ &= 2\pi G\rho dz \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ &= 2\pi G\rho dz \left[\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right] \end{aligned}$$



Soit \vec{A} l'attraction produite en P par le disque: $\vec{A} = \vec{\nabla}V$ ne dépend que de z et est dirigé suivant l'axe z . $\vec{A} = A_z \vec{e}_z$ avec \vec{e}_z dirigé vers le haut, et $A_z = \frac{\partial V}{\partial z}$.

$$\vec{A} = 2\pi G\rho z dz \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] \vec{e}_z$$

- Si $z > 0$ on a $A_z < 0 \Rightarrow$ le disque attire le point P .
- Si $z < 0$ on a $A_z > 0$: le disque attire le point P .

Cas particulier: Attraction d'un disque infini

$$\lim_{a \rightarrow \infty} A_z = -2\pi G\rho dz \text{ csgn}(z)$$

où $\text{csgn}(z)$ est la fonction "signe":

$$\text{csgn}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ -1 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

1.4 Equation de Poisson

Le potentiel gravitationnel vérifie l'équation de Poisson:

$$\Delta V = \begin{cases} -4\pi G\rho & \text{a l'interieur des masses} \\ 0 & \text{a l'exterieur des masses} \end{cases}$$

1.5 Formule de Gauss

$$\int_{S'} \vec{\nabla}V \cdot \vec{n} \, dS = -4\pi G \underbrace{\int_{V'} \rho dV}_{\text{masse interne a } S'}$$

\Rightarrow Le flux de l'attraction sur une surface S' = $-4\pi G \times$ somme des masses internes à S' .

Nous allons étudier deux cas particuliers:

- le potentiel gravitationnel interne et externe d'un corps sphérique
- le potentiel externe d'un corps presque sphérique

2 Etude du potentiel gravitationnel d'un corps sphérique

Pour un corps sphérique, le potentiel gravitationnel ne dépendra que du rayon r . Nous allons tout d'abord étudier analytiquement le cas simple de la sphère homogène, puis nous présenterons le cas d'une sphère radialement stratifiée en densité.

2.1 Etude du potentiel gravitationnel d'une sphère homogène

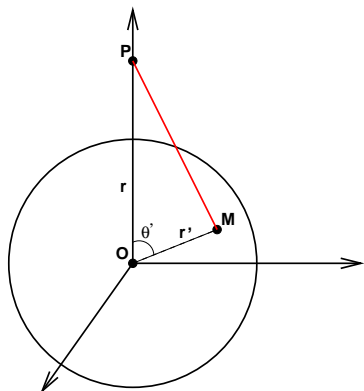
On veut calculer le potentiel gravitationnel en tout point $P(r, \theta, \varphi)$ extérieur ou intérieur à la sphère, par différentes méthodes.

2.1.1 A partir de la définition

$$V(r, \theta, \varphi) = G \int_V \frac{\rho(r', \theta', \varphi')}{l} dv'$$

où V est le volume de la sphère, l la distance entre le point P et le point courant $M(r', \theta', \varphi')$ qui décrit le volume.

A cause de la symétrie sphérique, $V(P)$ sera le même sur une sphère de rayon r . En particulier, on prend P sur l'axe z :



$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{r}; & \vec{OM} &= \vec{r}'; & \vec{MP} &= \vec{l} \\ \vec{l} &= \vec{r} - \vec{r}' & \Rightarrow & & l &= \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \theta'} \end{aligned}$$

Si la sphère est homogène, on a $\rho = \rho_o = \text{constante}$.

$$\Rightarrow V(r, \theta, \varphi) = G\rho_o \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'}{(r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \theta')^{1/2}}$$

• on intègre par rapport à φ' $\Rightarrow 2\pi$

• on intègre par rapport à θ' : on pose $u = \cos \theta'$ et $du = -\sin \theta' d\theta'$. [Rappel:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a + bu}} =$$

$$\frac{2}{b} \sqrt{a + bu}]$$

$$\begin{aligned} \int_1^{-1} \frac{-du}{(r'^2 + r^2 - 2rr'u)^{1/2}} &= \left[\frac{1}{rr'} \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'u} \right]_1^{-1} \\ &= \frac{1}{rr'} \left(\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(P) = 2\pi G\rho_o \frac{1}{r} \int_0^a \left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2} \right] r' dr'$$

• on intègre par rapport à r' :

- P extérieur à la sphère : $r > r' \Rightarrow r - r' > 0 \Rightarrow \sqrt{(r - r')^2} = r - r'$

$$\begin{aligned} V(P) &= 2\pi G\rho_o \frac{1}{r} \int_0^a 2r'^2 dr' \\ &= \frac{4\pi}{3} G\rho_o a^3 \frac{1}{r} \\ \Rightarrow &= \frac{GM}{r} \quad \text{avec} \quad M = \frac{4\pi}{3} \rho_o a^3 \end{aligned}$$

- P intérieur à la sphère: on sépare l'intégrale en deux parties: $\int_0^a = \int_0^r + \int_r^a$.

Si $r < r' \Rightarrow \sqrt{(r - r')^2} = r' - r$.

Si $r > r' \Rightarrow \sqrt{(r - r')^2} = r - r'$.

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{r'}{r} \left[\sqrt{(r + r')^2} - \sqrt{(r - r')^2} \right] dr' &= \int_0^r \frac{2r'^2}{r} dr' + \int_r^a 2r' dr' \\ &= \frac{2}{3} r^2 + a^2 - r^2 \\ &= a^2 - \frac{1}{3} r^2 \end{aligned}$$

On obtient alors:

$$V(P) = 2\pi G\rho_o \left(a^2 - \frac{1}{3} r^2 \right)$$

Finalement, le potentiel gravitationnel d'une sphère homogène de masse M et de rayon a s'écrit:

$$\begin{cases} V(P) = \frac{GM}{2a^3} (3a^2 - r^2) & \text{si } r < a \\ V(P) = \frac{GM}{r} & \text{si } r > a \end{cases}$$

2.1.2 A partir de l'équation de Poisson

- à l'extérieur de la sphère:

$$\Delta V = 0$$

à cause de la symétrie sphérique, V ne dépend que de r .

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] = 0 &\Rightarrow r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = cste = -A \\ \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} &\Rightarrow V = \frac{A}{r} + B \end{aligned}$$

Remarque: quand $r \rightarrow \infty$, le potentiel est nul $\Rightarrow B = 0$.

A l'extérieur de la sphère: $V = \frac{A}{r}$.

- à l'intérieur de la sphère:

$$\Delta V = -4\pi G\rho_o \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] = -4\pi G\rho_o$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 r - \frac{C}{r^2} \Rightarrow V = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 \frac{r^2}{2} + \frac{C}{r} + D$$

Au centre ($r = 0$), V doit rester fini $\Rightarrow C = 0$, afin qu'il n'y ait pas de divergence.

$$\Rightarrow V = -\frac{GM}{2} \frac{r^2}{a^3} + D$$

- Continuité du potentiel en $r = a$:

$$\frac{A}{a} = -\frac{GM}{2a} + D$$

- Continuité de la dérivée radiale du potentiel en $r = a$:
(en l'absence de masse superficielle en $r = a$, l'attraction radiale est continue)

$$\begin{aligned} -\frac{A}{a^2} &= -\frac{GM}{a^2} &\Rightarrow & A = GM \\ &&\Rightarrow & D = \frac{3}{2} \frac{GM}{a} \end{aligned}$$

- Conclusion:

$$\begin{cases} V(P) = \frac{GM}{2a^3}(3a^2 - r^2) & \text{si } r < a \\ V(P) = \frac{GM}{r} & \text{si } r > a \end{cases}$$

2.1.3 A partir de la formule de Gauss

- à l'extérieur de la sphère:

$$\begin{aligned} \int_S \vec{A} \cdot \vec{e}_r \, ds &= -4\pi G \times M &\Rightarrow & A_r r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = -4\pi G \times M \\ &&\Rightarrow & A_r = -\frac{GM}{r^2} &\Rightarrow & V = \frac{GM}{r} + cste \end{aligned}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0 \quad \Rightarrow \quad cste = 0$$

- à l'intérieur de la sphère:

$$\begin{aligned} \int_S \vec{A} \cdot \vec{e}_r \, r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi &= -4\pi G \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 r'^2 \sin \theta \, dr' \, d\theta \, d\varphi \\ 4\pi r^2 A_r &= -4\pi G \times \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3 \\ &\Rightarrow A_r = -\frac{4\pi}{3} G \rho_0 r \\ &\Rightarrow V = -\frac{GM}{2a} \frac{r^2}{a^2} + E \end{aligned}$$

- Continuité du potentiel en $r = a$:

$$\Rightarrow \frac{GM}{a} = -\frac{GM}{2a} + E$$

- Conclusion:

$$\begin{cases} V(P) = \frac{GM}{2a^3}(3a^2 - r^2) & \text{si } r < a \\ V(P) = \frac{GM}{r} & \text{si } r > a \end{cases}$$

2.2 Calcul de la gravité

On note g la gravité: la gravité sur une surface S correspond au gradient du potentiel gravitationnel suivant la normale \vec{n} à la surface.

$$g = \vec{\nabla}V \cdot \vec{n}$$

Pour la sphère, on a :

$$g = \vec{\nabla}V \cdot \vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad g(r) = \frac{\partial V}{\partial r}$$

2.2.1 Gravité dans la sphère homogène

- A l'extérieur: $g(r) = -\frac{GM}{r^2}$
 - A l'intérieur: $g(r) = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0 r = -\frac{GM}{a^2} \frac{r}{a}$
- Au centre de la Terre, $g(0) = 0$.

2.2.2 Gravité dans la sphère stratifiée

A partir de la formule de Gauss:

$$4\pi A_r r^2 = -4\pi G \times 4\pi \int_0^r \rho(x)x^2 dx$$

$$g(r) = A_r \quad \Rightarrow \quad g(r) = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(x)x^2 dx$$

2.3 Pression hydrostatique dans la planète

Sur de longues échelles de temps (de l'ordre de l'âge de la Terre), la Terre a un comportement fluide.

On a donc à l'intérieur de la planète, un équilibre hydrostatique

$$\vec{\nabla}P = \rho\vec{\nabla}V$$

On veut calculer la pression hydrostatique $P(r)$ dans une Terre homogène, sphérique avec une surface libre.

- à l'extérieur, pas de pression ($\vec{\nabla}P$ est une force interne)
- à l'intérieur: $\vec{\nabla}P = \rho_0\vec{\nabla}V = \vec{\nabla}(\rho_0 V)$

$$\Rightarrow P = \rho_0 V + P_o \quad \text{avec } P_o \text{ constante d'intégration}$$

$$\Rightarrow P = \rho_0 \frac{GM}{2a^3} (3a^2 - r^2) + P_o$$

La surface de la Terre ($r = a$) est une surface libre ($P(a) = 0$).

$$\text{D'où } P_o = -\rho_0 \frac{GM}{a}.$$

$$\Rightarrow P(r) = \frac{GM}{2a} \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

- Au centre de la sphère: $P(0) = \frac{GM}{2a} \rho_o$.

Application numérique: $\rho_o = 5520 \text{ kg/m}^3$, $a = 6371 \text{ km}$.

On trouve $P(0) = 1,73 \times 10^{11} \text{ Pa} = 1,73 \text{ Mbars}$.

- En un point proche de la surface, à la profondeur z , $r = a - z$ avec $z \ll a$. La pression s'écrit: $P(z) = \frac{GM}{2a^3} \rho_o z (2a - z)$

En faisant un développement limité en $z/a \ll 1$, on a $P(z) \simeq \frac{GM}{a^2} \rho_o z$

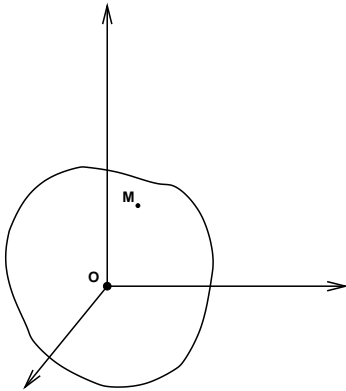
Si on note $g_o = \frac{GM}{a^2}$ la gravité en surface, on a:

$$P(z) = \rho_o g_o z$$

A la surface de la Terre, on $\rho g_o = 30000 \text{ kg/m}^2/\text{s}^2$

$\Rightarrow P(z) = 30000 \text{ Pa/m} = 0.3 \text{ Bar/m}$

2.4 Calcul de l' énergie gravitationnelle



En un point M , de masse unitaire, on a un potentiel V . En fait, en M , on a la masse ρdv où dv est l' élément de volume entourant M .

$\Rightarrow \rho dv V$ a la dimension d' une energie (energie potentielle).

On note E l' energie gravitationnelle définie par:

$$E = \frac{1}{2} \int_{Terre} \rho V dv$$

(le terme $\frac{1}{2}$ provient du fait qu'en intégrant on compte 2 fois le même effet: M attire M' et M' attire M).

Pour une Terre homogène et sphérique:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_o \frac{GM}{2a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad \Rightarrow \quad E = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{a}$$

Pour la Terre, $M = 6 \times 10^{24} \text{ kg} \quad \Rightarrow \quad E = 2 \times 10^{32} \text{ Joule}$.

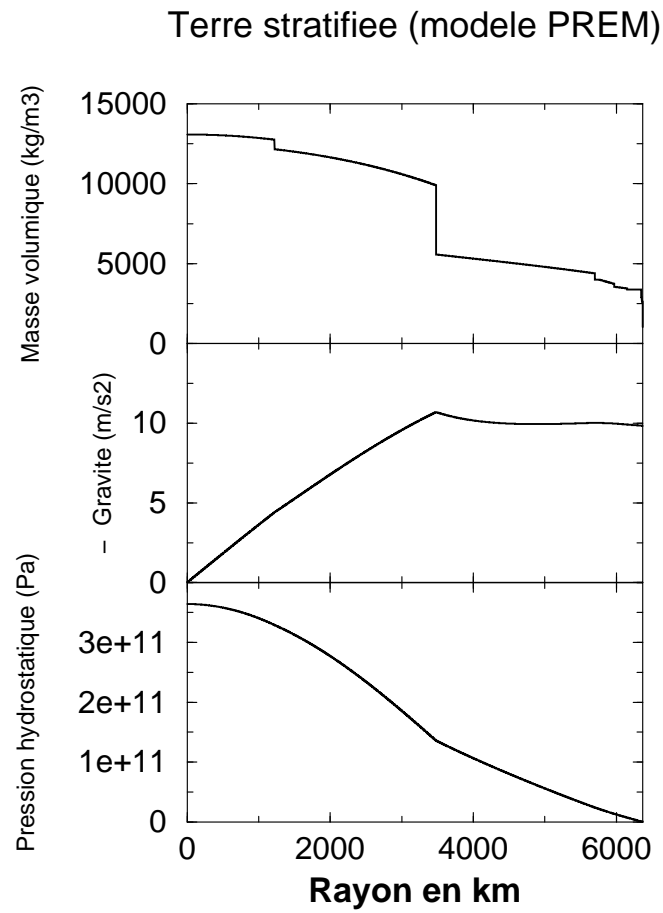
- Remarque 1: l' energie gravitationnelle correspond à l' energie qui a été utilisée lors de l' accréation, ou encore, à l' energie qu' il faudrait fournir pour annuler l' effet d' interaction des particules les unes sur les autres (i.e. pour mettre les masses à l' infini).

- Remarque 2: l' energie due à la chaleur produite par la Terre depuis 4.5 Ga est de l' ordre de $5 \times 10^{30} \text{ Joule}$.

2.5 Modèle de Terre radialement stratifié

Le modèle moyen de Terre le plus largement utilisé est le modèle PREM. La Terre est sphérique, radialement stratifiée en densité.

On peut calculer la gravité et la pression hydrostatique à chaque profondeur.



3 Géométrie de masse

3.1 Définitions

Soit un corps de masse volumique $\rho(r, \theta, \varphi)$, de volume V . On note r le rayon, θ la colatitude et φ la longitude.

- Élément de volume de coordonnées sphériques;

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

- Masse:

$$M = \int_V \rho dv$$

- Centre de masse G :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{M} \int_V \rho x dv \\ \frac{1}{M} \int_V \rho y dv \\ \frac{1}{M} \int_V \rho z dv \end{pmatrix}$$

Dans un repère centré sur le centre de masse, on a $x_G = y_G = z_G = 0$.

- Moments d'inertie

$$I_{11} = \int_V \rho (y^2 + z^2) dv; \quad I_{22} = \int_V \rho (x^2 + z^2) dv; \quad I_{33} = \int_V \rho (y^2 + x^2) dv$$

- Produits d'inertie

$$I_{12} = - \int_V \rho xy dv; \quad I_{13} = - \int_V \rho xz dv; \quad I_{23} = - \int_V \rho yz dv$$

3.2 Cas de la sphère radialement stratifiée

Soit I le moment d'inertie d'une sphère de rayon a de densité $\rho(r)$.

$$I = \frac{I_{11} + I_{22} + I_{33}}{3} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2}{3} \int_V \rho(r) r^2 dv$$

$$I = \frac{2}{3} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r) r^4 dr \sin \theta d\theta d\varphi \quad \text{avec} \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi$$

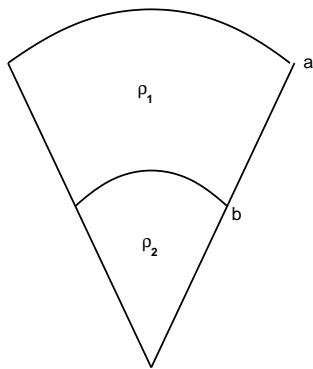
$$\Rightarrow \quad I = \frac{8\pi}{3} \int_0^a \rho(r) r^4 dr$$

3.2.1 Cas de la sphère homogène

$\rho(r) = \rho_o$. On a alors:

$$I = \frac{8\pi}{15} \rho_o a^5 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2}{5} M a^2 \quad \text{avec} \quad M = \frac{4\pi}{3} \rho_o a^3$$

3.2.2 Cas de la sphère à deux couches



Masse de la sphère:

$$M = \frac{4\pi}{3} [\rho_2 b^3 + \rho_1 (a^3 - b^3)]$$

Moment d'inertie de la sphère:

$$I = \frac{8\pi}{15} [\rho_2 b^5 + \rho_1 (a^5 - b^5)]$$

On a alors le rapport:

$$\frac{I}{Ma^2} = \frac{2}{5} \left[1 - (\rho_2 - \rho_1) \frac{(a^2 - b^2)b^3}{a^2[\rho_2 b^3 + \rho_1 (a^3 - b^3)]} \right]$$

comme $\rho_2 > \rho_1$ (la densité augmente avec la profondeur), on a:

$$\frac{I}{Ma^2} \leq \frac{2}{5}$$

C'est par exemple le cas des planètes comportant un noyau de fer.

Sur Terre, on a $\frac{I}{Ma^2} = 0.33$.

3.2.3 Remarque

En planétologie:

1/ on observe la constante de précession $\frac{C-A}{C}$

2/ on observe $J_2 = \frac{C-A}{Ma^2}$ s'il existe un satellite

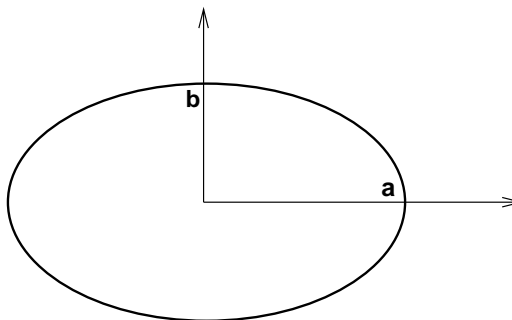
3/ on en déduit le rapport $\frac{C}{Ma^2}$ et si la planète possède ou non un noyau dense.

3.3 Cas de l'ellipsoïde de révolution

3.3.1 Equation de l'ellipsoïde de révolution

En coordonnées cartésiennes, la surface de l'ellipsoïde est décrite par l'équation:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



En introduisant les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r_E \sin \theta \cos \varphi \\ y = r_E \sin \theta \sin \varphi \\ z = r_E \cos \theta \end{cases}$$

avec $r_E(\theta, \varphi)$ le rayon qui décrivant la surface de l'ellipsoïde, on obtient:

$$\frac{r_E^2}{a^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

Pour l'ellipsoïde de révolution, r_E ne dépend pas de φ .

Soit α l'aplatissement géométrique: $\alpha = \frac{a-b}{a}$.

On fait l'hypothèse que l'ellipsoïde est peu aplati: $\alpha \ll 1$. (sur Terre, on a $\alpha \simeq \frac{1}{300}$). On fait alors un développement limité en $\alpha \ll 1$.

$$\frac{a^2}{b^2} \simeq 1 + 2\alpha$$

(Rappel : $(1+u)^n \simeq 1+nu$ si $u \ll 1$).

On a donc:

$$\frac{r_E^2}{a^2} \simeq 1 - 2\alpha \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow r_E(\theta) \simeq a[1 - \alpha \cos^2 \theta]$$

3.3.2 Rayon de la sphère équivalente

c'est-à-dire la sphère de même volume. On note r_o ce rayon:

$$\frac{4\pi}{3} r_o^3 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r_E(\theta)} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$$

On intègre par rapport à r .

$$\frac{4\pi}{3} r_o^3 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r_E^3(\theta)}{3} \sin \theta d\theta d\varphi$$

En faisant un développement limité en $\alpha \ll 1$:

$$r_E^3(\theta) \simeq a^3[1 - 3\alpha \cos^2 \theta] \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi}{3} r_o^3 \simeq \frac{4\pi}{3} a^3(1 - \alpha)$$

On a donc le rayon de la sphère équivalente:

$$r_o \simeq a\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)$$

Le rayon r_E décrivant la surface de l'ellipsoïde s'écrira:

$$r_E(\theta) \simeq r_o \left[1 - \frac{2}{3} \alpha P_2^0(\cos \theta)\right] \quad \text{avec} \quad P_2^0(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$$

3.3.3 Masse de l'ellipsoïde homogène

$$M = \frac{4\pi}{3} a^3 (1 - \alpha) \rho_o$$

3.3.4 Moments d'inertie de l'ellipsoïde homogène, de révolution

L'ellipsoïde étant de révolution, on a $I_{11} = I_{22}$ et $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$.

$$I_{11} = \int_V \rho_o (y^2 + z^2) r^2 dv \quad \text{avec} \quad y^2 + z^2 = r^2 (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta)$$

$$I_{11} = \rho_o \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r_E(\theta)} r^4 (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi dr$$

En approximant $r_E^5(\theta) \simeq a^5 [1 - 5\alpha \cos^2 \theta]$, on a :

$$I_{11} \simeq \frac{1}{5} \rho_o a^5 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 - 5\alpha \cos^2 \theta) (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi dr$$

$$\Rightarrow I_{11} \simeq \frac{8\pi}{15} \rho_o a^5 (1 - 2\alpha)$$

De même, on trouve

$$I_{33} \simeq \frac{8\pi}{15} \rho_o a^5 (1 - \alpha)$$

On a donc

$$I_{33} - I_{11} \simeq \frac{8\pi}{15} \rho_o a^5 \alpha \quad \text{et} \quad \frac{I_{33} - I_{11}}{Ma^2} \simeq \frac{2}{5} \alpha$$

Le coefficient J_2 pour un ellipsoïde homogène de révolution s'écrit donc, au premier ordre en α :

$$J_2 \simeq \frac{2}{5} \alpha$$

3.4 Cas d'un corps presque sphérique

3.4.1 Anomalie de masse volumique dans le manteau terrestre:

La masse volumique dans la Terre présente des variations latérales. On peut la décomposer en harmoniques sphériques superficielles:

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_o(r) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\delta\rho_n^{cm}(r) \cos m\varphi + \delta\rho_n^{sm}(r) \sin m\varphi] P_n^m(\cos(\theta))$$

avec P_n^m les fonctions de Legendre, θ la colatitute et φ la longitude.

- $\rho_o(r) \rightarrow$ tenseur d'inertie $I_{11}, I_{22} \dots$
- $\delta\rho(r, \theta, \varphi) \rightarrow$ tenseur d'inertie $\delta I_{11}, \delta I_{22}..$

3.4.2 Perturbations du tenseur d'inertie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta I_{11} = \frac{4\pi}{5} \int_b^a r^4 \left[\frac{1}{3} \delta\rho_2^{c0}(r) - \delta\rho_2^{c2}(r) \right] dr \\ \delta I_{22} = \frac{4\pi}{5} \int_b^a r^4 \left[\frac{1}{3} \delta\rho_2^{c0}(r) + \delta\rho_2^{c2}(r) \right] dr \\ \delta I_{33} = -\frac{8\pi}{15} \int_b^a r^4 \delta\rho_2^{c0}(r) dr \\ \delta I_{12} = -\frac{8\pi}{5} \int_b^a r^4 \delta\rho_2^{s2}(r) dr \\ \delta I_{13} = -\frac{4\pi}{5} \int_b^a r^4 \delta\rho_2^{c1}(r) dr \\ \delta I_{23} = -\frac{4\pi}{5} \int_b^a r^4 \delta\rho_2^{s1}(r) dr \end{array} \right.$$

→ seules les anomalies de masse de degré 2 créent du tenseur d'inertie.

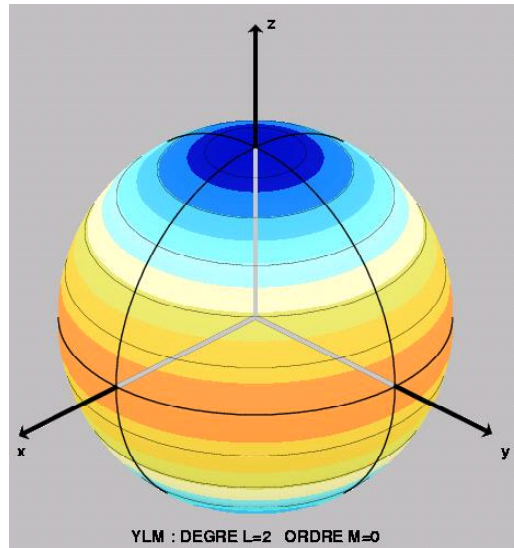


Figure 1: Harmonique sphérique $n = 2, m = 0$

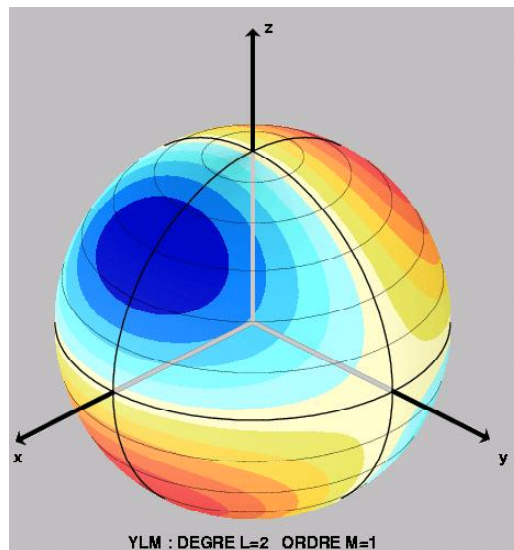


Figure 2: Harmonique sphérique $n = 2, m = 1$

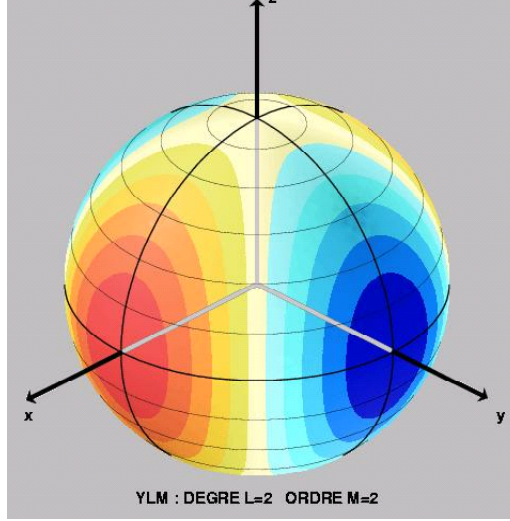


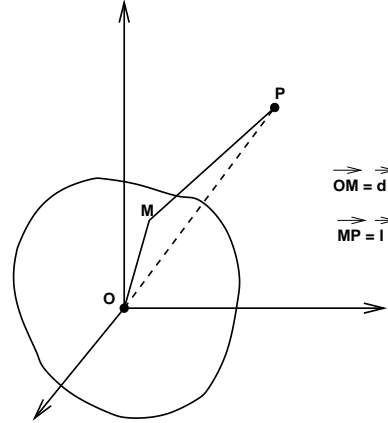
Figure 3: Harmonique sphérique $n = 2, m = 2$

4 Potentiel gravitationnel externe d'un corps presque sphérique

On veut calculer en un point éloigné le potentiel gravifique d'un corps presque sphérique de densité ρ .

On suppose que le triedre est centré sur le centre de masse du corps.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{d} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Le potentiel gravitationnel en P s'écrit:

$$V(P) = G \int_V \frac{\rho d\xi d\eta d\zeta}{l} \quad \text{avec} \quad \vec{l} = \vec{r} - \vec{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{d}{r}\right)^2 - \frac{2\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^2} \right]^{-1/2}$$

En un point P très éloigné, $\frac{d}{r} \ll 1$, on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} &\simeq \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{d} \cdot \vec{r})^2 - d^2 r^2}{r^4} + \dots \right] \\ \Rightarrow V(P) &\simeq G \int_V \frac{\rho d\xi d\eta d\zeta}{r} \left[1 + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{d} \cdot \vec{r})^2 - d^2 r^2}{r^4} + \dots \right] \end{aligned}$$

On va calculer les premiers termes de ce développement limité et les exprimer en fonction des quantités de géométrie de masse.

- $\frac{G}{r} \int_V \rho d\xi d\eta d\zeta = \frac{GM}{r} \Rightarrow$ le premier terme est $\frac{GM}{r}$.

- $G \int_V \rho \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} d\xi d\eta d\zeta = 0$ par définition du centre de masse.

- $G \int_V \rho \frac{3(\vec{d} \cdot \vec{r})^2 - d^2 r^2}{2r^4} d\xi d\eta d\zeta = \frac{G}{r^5} \left[z^2 \left(\frac{I_{11} + I_{22}}{2} - I_{33} \right) + y^2 \left(\frac{I_{11} + I_{33}}{2} - I_{22} \right) \right. \\ \left. + x^2 \left(\frac{I_{22} + I_{33}}{2} - I_{11} \right) - 3I_{12}xy - 3I_{13}xz - 3I_{23}yz \right]$

Si on introduit les harmoniques sphériques de degré 2:

$$\begin{cases} Y_{21}^c = 3 \cos \theta \sin \theta \cos \varphi = \frac{3xz}{r^2} \\ Y_{21}^s = 3 \cos \theta \sin \theta \sin \varphi = \frac{3yz}{r^2} \end{cases} \quad \begin{cases} Y_{22}^c = 3 \sin^2 \theta \cos 2\varphi \\ Y_{22}^s = 3 \sin^2 \theta \sin 2\varphi = \frac{6xy}{r^2} \end{cases} \quad \left\{ Y_{20}^c = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right.$$

On a

$$\begin{cases} x^2 = \frac{r^2}{3} \left[1 - Y_{20} + \frac{1}{2} Y_{22}^c \right] \\ y^2 = \frac{r^2}{3} \left[1 - Y_{20} - \frac{1}{2} Y_{22}^c \right] \\ z^2 = \frac{r^2}{3} \left[1 + 2Y_{20} \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(P) \simeq \frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3} \left[\left(\frac{I_{11} + I_{22}}{2} - I_{33} \right) Y_{20}^c + \frac{I_{22} - I_{11}}{4} Y_{22}^c - I_{13} Y_{21}^c - I_{23} Y_{21}^s - \frac{1}{2} I_{12} Y_{22}^s \right]$$

On note classiquement $J_2 = \frac{I_{33} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2}}{Ma^2}$. On a alors:

$$V(r, \theta, \varphi) \simeq \frac{GM}{r} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} J_2 Y_{20}(\theta, \varphi) + \frac{a^2}{r^2} \frac{I_{22} - I_{11}}{4Ma^2} Y_{22}^c(\theta, \varphi) - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{I_{13}}{Ma^2} Y_{21}^c(\theta, \varphi) + \frac{I_{23}}{Ma^2} Y_{21}^s(\theta, \varphi) + \frac{I_{12}}{2Ma^2} Y_{22}^s(\theta, \varphi) \right) \right]$$

Théorème de MacCullagh

Remarque: pour l'ellipsoïde de révolution :

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0 \quad \text{et} \quad I_{11} = I_{22}; \quad \Rightarrow J_2 = \frac{I_{33} - I_{11}}{Ma^2}$$

$$\Rightarrow V(r, \theta) \simeq \frac{GM}{r} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} J_2 Y_{20}(\theta, \varphi) \right]$$

Remarque: le potentiel gravitationnel externe se décompose en harmoniques sphériques de degré n et d'ordre m (d'après l'équation de Poisson, $\Delta V = 0$ à l'extérieur des masses):

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^m \sum_{m=0}^m (c_n^m \cos m\varphi + s_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \right]$$

5 Ellipsoïde de référence

L'ellipsoïde de référence est un ellipsoïde de masse M , de demi-grand axe a (donné par la géodésie) et de demi-petit axe b , dont les deux premiers termes du potentiel gravitationnel (degré 0 et 2) sont identiques aux deux premiers termes du potentiel de la Terre réelle. C'est la superposition d'un ellipsoïde homogène de révolution de masse M_1 en rotation $\vec{\omega}$ (ellipsoïde de Mac Laurin) et d'un homoid de masse M_2 infiniment mince de même surface limite. Son champ extérieur de pesanteur sera donc la somme des deux potentiels newtoniens et d'un potentiel centrifuge.

$$V = U(\text{Mac Laurin}) + U_h(\text{homoid}) + \Psi(\text{centrifuge})$$

5.1 Potentiel d'un ellipsoïde homogène de révolution

A cause de la symétrie de révolution, le potentiel U ne dépendra que de la colatitude θ et non pas de la longitude

$$\Rightarrow U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n^0}{r^{n+1}} P_n^0(\cos \theta)$$

A cause de la symétrie équatoriale [$U(r, \pi - \theta) = U(r, \theta)$]:

$$\Rightarrow U(r, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_{2p}^0}{r^{2p+1}} P_{2p}^0(\cos \theta)$$

Pour un θ_o fixé, si on connaît le potentiel en un point $A(r_o, \theta_o)$,

$$V_A(r_o, \theta_o) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{r_o^{n+1}} P_n^0(\cos \theta_o)$$

on peut calculer le potentiel à l'extérieur, en P , par prolongement en $\frac{1}{r^{n+1}}$:

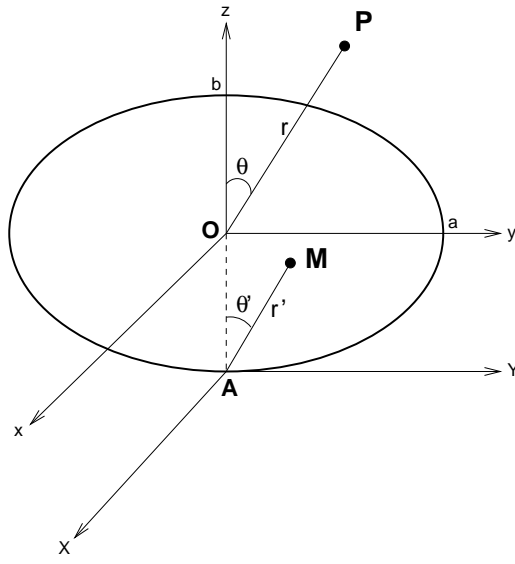
$$V_P(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{r_o^{n+1}} \frac{r_o^{n+1}}{r^{n+1}} P_n^0(\cos \theta)$$

Dans le repère Oxyz, centré au centre de masse, l'équation d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe Oz s'écrit:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

On veut calculer le potentiel gravifique en tout point P extérieur à l'ellipsoïde.

On va tout d'abord calculer le potentiel au point A situé sur le petit axe. Pour cela on fait un changement de repère (Oxyz) \rightarrow (A,X,Y,Z).



Dans (XYZ), l'équation de l'ellipsoïde s'écrit:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{(Z - b)^2}{b^2} = 1$$

ou encore

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} - \frac{2Z}{b} = 0$$

En coordonnées sphériques, l'équation de l'ellipsoïde s'écrit:

$$\begin{cases} X = r_o \sin \theta' \cos \varphi' \\ Y = r_o \sin \theta' \sin \varphi' \\ Z = r_o \cos \theta' \end{cases} \Rightarrow \frac{X^2 + Y^2}{a^2} = \frac{r_o^2}{a^2} \sin^2 \theta'$$

$$\Rightarrow \frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} - \frac{2Z}{b} = \frac{r_o}{a^2} \left[r_o (\sin^2 \theta' + \frac{a^2}{b^2} \cos^2 \theta') - 2 \frac{a^2}{b} \cos \theta' \right] = 0$$

$$\Rightarrow r_o = \frac{2a^2 b \cos \theta'}{b^2 \sin^2 \theta' + b^2 \cos^2 \theta'}$$

On introduit $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ et $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ avec $1 + e'^2 = \frac{1}{1 - e^2}$.

$$\Rightarrow r_o(\theta') = \frac{2b \cos \theta'}{1 - e^2 \sin^2 \theta'} = \frac{2b \cos \theta'}{(1 - e^2)(1 + e'^2 \cos^2 \theta')}$$

Nous allons calculer le potentiel produit par l'ellipsoïde de révolution au point A:

$$V_A = G \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_o(\theta')} \frac{\rho}{r'} r'^2 \sin \theta' d\varphi' d\theta' dr'$$

$$\Rightarrow V_A = 2\pi G \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{2} r_o^2(\theta') \sin \theta' d\theta'$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{4\pi G \rho b^2}{(1 - e^2)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{(1 + e'^2 \cos^2 \theta')^2}$$

• Intégration directe de cette intégrale:

Posons $v = e' \cos \theta'$.

$$V_A = \frac{4\pi G \rho b^2}{(1 - e^2)^2} \frac{1}{e'^3} \int_0^{e'} \frac{v^2 dv}{(1 + v^2)^2} \Rightarrow V_A = \frac{4\pi G \rho b^2}{(1 - e^2)^2} \frac{1}{2e'^3} \left[\arctg e' - \frac{e'}{1 + e'^2} \right]$$

$$\Rightarrow V_A = 4\pi G\rho b^2 \frac{(1+e'^2)^2}{2e'^3} \left[\arctg e' - \frac{e'}{1+e'^2} \right]$$

• Développement en séries:

Développons le dénominateur de l'intégrale selon la formule du binôme:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + \dots + (-1)^p(p+1)x^p + \dots$$

$$\text{D'où: } (1 + e'^2 \cos^2 \theta')^{-2} = 1 - 2e'^2 \cos^2 \theta' + \dots + (-1)^p(p+1)e'^{2p} \cos^{2p} \theta' + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 \theta'}{(1 + e'^2 \cos^2 \theta')^2} = \cos^2 \theta' - 2e'^2 \cos^4 \theta' + \dots + (-1)^p(p+1)e'^{2p} \cos^{2p+2} \theta' + \dots$$

On note $V_a = \sum_p V_{Ap}$ avec

$$V_{Ap} = \frac{4\pi G\rho b^2}{(1-e^2)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^p(p+1)e'^{2p} \cos^{2p+2} \theta' \sin \theta' d\theta'$$

$$\Rightarrow V_{Ap} = 4\pi G\rho a^2(1+e'^2)(-1)^p \frac{p+1}{2p+3} e'^{2p}$$

Ordonnons la série V_A en e'^2 . Le terme général est alors:

$$4\pi G\rho a^2 \left[(-1)^{p-1} \frac{p}{2p+1} + (-1)^p \frac{p+1}{2p+3} \right] e'^{2p} = 4\pi G\rho a^2 \frac{(-1)^p e'^{2p}}{(2p+1)(2p+3)}$$

Le potentiel V_A s'écrit alors:

$$V_A = \frac{4}{3}\pi G\rho a^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4\pi G\rho a^2 (-1)^p e'^{2p}}{(2p+1)(2p+3)}$$

Posons $M_1 = \frac{4}{3}\pi\rho a^2 b$ la masse de l'ellipsoïde homogène de révolution.

$$V_A = \frac{GM_1}{b} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{3GM_1}{b^{2p+1}} \frac{(a^2 - b^2)^p (-1)^p}{(2p+1)(2p+3)}$$

Le potentiel général s'écrit en un point $P(r, \theta)$ extérieur à l'ellipsoïde:

$$U(r, \theta) = \frac{GM_1}{r} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{3GM_1}{r^{2p+1}} \frac{(a^2 - b^2)^p (-1)^p}{(2p+1)(2p+3)} P_{2p}^0(\cos \theta)$$

Remarque:

Nous avons toujours supposé $r > a$ le demi-grand axe. On voit ici que pour que la série converge pour r étant égal à b , il faut $e'^{2p} < 1$, c'est-à-dire $\frac{a^2 - b^2}{b^2} < 1 \Rightarrow a^2 < 2b^2 \Rightarrow b < a < \sqrt{2}b$.

On notera $c^2 = a^2 - b^2$

Calcul du coefficient J_2 de l'ellipsoïde homogène de révolution:

A l'ordre 2, on a $U_2(r, \theta) = \frac{GM_1}{r} \left[1 + \frac{3}{r^2} \frac{a^2 - b^2}{3 \times 5} (-1) P_2^0(\cos \theta) \right]$.

$$\text{Notons } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Rightarrow U_2(r, \theta) = \frac{GM_1}{r} \left[1 - \frac{a^2 e^2}{r^2} \frac{1}{5} P_2^0(\cos \theta) \right]$$

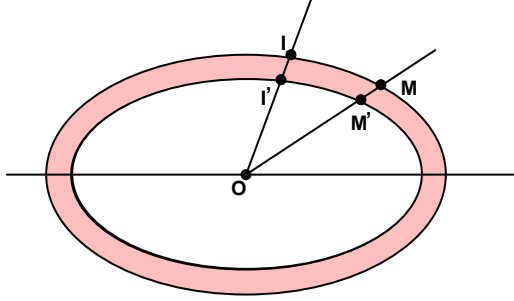
et

$$e^2 = \frac{M_1 a^2 - M_1 b^2}{M_1 a^2} = \frac{\frac{2}{5} M_1 a^2 - \frac{1}{5} (M_1 a^2 + M_1 b^2)}{\frac{1}{5} M_1 a^2} = 5 \frac{C - A}{M_1 a^2}$$

$$\Rightarrow U_2(r, \theta) = \frac{GM_1}{r} \left[1 - \frac{a^2 C - A}{r^2} \frac{1}{M_1 a^2} P_2^0(\cos \theta) \right]$$

On retrouve $J_2 = \frac{C - A}{M_1 a^2}$ déduit déjà de la formule de Mc Cullagh.

5.2 Calcul du potentiel de l'homoid



L'homoid est un solide délimité par la coquille comprise entre deux ellipsoïdes homogènes concentriques et homothétiques, de même densité.

$$\frac{OI'}{OI} = \frac{OM'}{OM}$$

Le potentiel de l'homoid sera donc la différence des deux potentiels ellipsoïdiques:

$$U_h = U(m + dm, c + dc) - U(m, c)$$

où m est la masse de l'ellipsoïde d'axe a et b .

$$\text{Homothétie} \Rightarrow \frac{da}{a} = \frac{db}{b}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow dc = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} da - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} db = \frac{a}{c} \left[da - \frac{b}{a} db \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{c} = \frac{a^2}{c^2} \left[\frac{da}{a} - \frac{b^2}{a^2} \frac{db}{b} \right] = \frac{a^2}{c^2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{da}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{c} = \frac{da}{a} = \frac{db}{b}$$

Soit $m + dm$ la masse de l'ellipsoïde d'axes $a + da$, $b + db$.

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho a^2 b \Rightarrow dm = \frac{4\pi}{3} \rho [2ab da + a^2 db]$$

$$\Rightarrow dm = \left[2 \frac{da}{a} + \frac{db}{b} \right] m \Rightarrow \frac{dm}{m} = 3 \frac{dc}{c}$$

Potentiel de l'homoid:

$$U_h = 3G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{r^{2n+1}} \frac{P_{2n}(\cos \theta)}{(2n+1)(2n+3)} \left[(c^{2n} + 2nc^{2n-1}dc)(m + dm) - c^{2n}m \right]$$

$$\Rightarrow U_h = 3G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n P_{2n}(\cos \theta)}{r^{2n+1} (2n+1)} mc^{2n-1} dc$$

Si on note $M_2 = dm = 3m \frac{dc}{c}$ la masse de l'homoid,

$$\Rightarrow U_h = GM_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c^{2n}}{r^{2n+1}} \frac{P_{2n}(\cos \theta)}{(2n+1)}$$

5.3 Potentiel de l'ellipsoïde de référence

$$V = U + U_h + \frac{\omega^2 r^2}{2} \sin^2 \theta$$

G

$$V = G \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{P_{2n}(\cos \theta)}{(2n+1)} \frac{c^{2n}}{r^{2n+1}} \left[\frac{3M_1}{2n+3} + M_2 \right] + \frac{\omega^2 r^2}{2} \sin^2 \theta$$

Remarque : $\frac{3GM_1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{GM_2}{2n+1} = \frac{GM_2 + \frac{3}{2}GM_1}{2n+1} + \frac{\frac{3}{2}GM_1}{2n+3}$

Posons $\begin{cases} K = GM_2 + \frac{3}{2}GM_1 \\ L = \frac{3}{2}GM_1 \end{cases}$

On a alors

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P_{2n}(\cos \theta) \frac{c^{2n}}{r^{2n+1}} \left[\frac{K}{2n+1} - \frac{L}{2n+3} \right] + \frac{\omega^2 r^2}{2} \sin^2 \theta$$

Comparaison des degrés 0 et 2 avec ceux de la Terre:

Le théorème de Mc Cullagh avec M la masse de la Terre:

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} J_2 P_2^0(\cos \theta) \right] \quad J_2 = 1.08 \times 10^{-3}$$

En identifiant les coefficients de degré 0 et 2, on obtient deux relations (par unicité de la décomposition en harmoniques sphériques):

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \left(K - \frac{L}{3} \right) = \frac{GM}{r} & \text{pour } n=0 \\ \frac{c^2}{r^3} \left(\frac{K}{3} - \frac{L}{5} \right) = \frac{GM}{r^3} a^2 J_2 & \text{pour } n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \frac{3}{4}GM \left(3 - 5 \frac{C-A}{Mc^2} \right) \\ L = \frac{15}{4}GM \left(1 - 3 \frac{C-A}{Mc^2} \right) \end{cases}$$

Posons $J'_2 = \frac{C-A}{Mc^2} = \frac{a^2}{c^2} J_2$. On a $\frac{K}{2n+1} - \frac{L}{2n+3} = \frac{3GM}{(2n+1)(2n+3)} [1-n+5nJ'_2]$

L'expression du potentiel de l'ellipsoïde de référence devient:

$$V = GM \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c^{2n}}{r^{2n+1}} P_{2n}(\cos \theta) \frac{1-n+5nJ'_2}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \sin^2 \theta$$

Remarque:

En supposant l'ellipsoïde de référence en équilibre hydrostatique (i.e. sa forme est une équipotentielle), on a $V(a, \frac{\pi}{2}) = V(b, 0)$.

En posant $e' = c/b$, on peut démontrer la relation suivante:

$$1 = 3J_2 \frac{(1 + e'^2)}{e'^2} + \frac{4 \omega^2 a^3}{15 GM} \frac{e'^3}{(1 + e'^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(3 + e'^2) \text{Arctge}' - 3e'}$$

Cette équation permet de calculer e' ou l'aplatissement de la figure de référence (de demi-grand axe donné) en fonction de J_2 , GM et ω .

5.4 Caractéristiques de l'ellipsoïde de référence

Les caractéristiques de l'ellipsoïde de référence, approximation mathématique théorique de la surface du globe varient suivant les systèmes géodésiques. Par exemple, dans le système géodésique GRS 80 du CNES:

$$a = 6378,137 \text{ km}; \quad b = 6356,7523141 \text{ km} \quad \Rightarrow \quad e^2 = .0066943800229$$

$$\Rightarrow \text{aplatissement geometrique} \frac{a - b}{a} = \frac{1}{298,257}$$

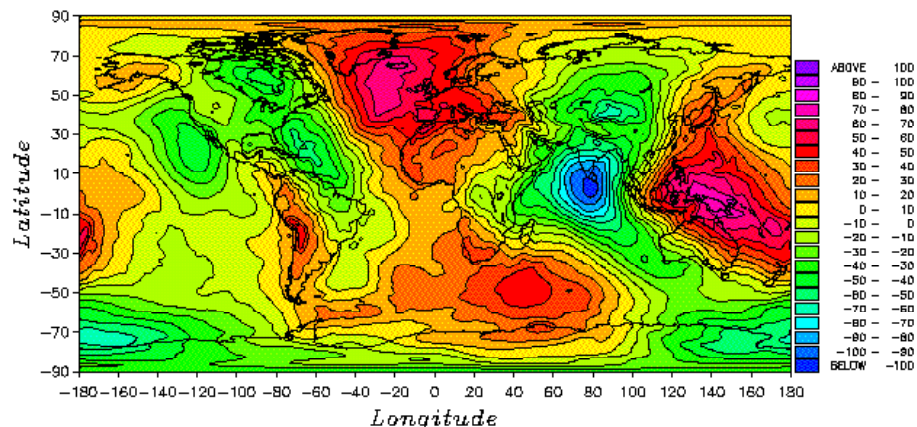
Remarque:

Si on fait l'hypothèse que la forme de la Terre est celle de la surface fluide en rotation, connaissant a , GM , ω et J_2 , la théorie de Clairaut permet de calculer l'aplatissement hydrostatique $\alpha_H = \frac{1}{299,80}$, que l'on trouve légèrement différent de l'aplatissement géométrique, égal lui à $\frac{1}{298,257}$. La Terre ne serait donc pas en équilibre hydrostatique. Cet écart provient très probablement des mouvements internes de convection.

5.5 Géoïde

Le géoïde est défini comme la surface équipotentielle en pesanteur (i.e. surface partout perpendiculaire à la verticale donnée par la direction du fil à plomb) correspondant à la surface des océans au repos. C est la forme gravimétrique de la Terre.

La figure suivante présente, en courbes de niveau (avec un pas entre deux courbes de 2 mètres), la forme du géoïde, représentée par son altitude comptée à partir de la surface de l'ellipsoïde, suivant le modèle franco-allemand GRIM4-C.



Le géoïde et l'ellipsoïde ne coïncident pas en tout point. Ces écarts, positifs ou négatifs, représentent les hétérogénéités de masse à l'intérieur du manteau terrestre. Les ondulations du géoïde présentent des longueurs d'onde de plusieurs ordres de grandeur (de 10000 km à quelques km.). Les deux plus grandes variations sont au Sud de l'Inde (-105 km) et en Nouvelle-Guinée (+73 km).

Les ondulations de très grandes longueurs d'onde du géoïde sont corrélées avec les signaux de tomographie sismique obtenus dans le manteau profond ce qui montre l'impact de la circulation convective du manteau profond sur la forme gravimétrique de la Terre.

5.6 Pesanteur sur l'ellipsoïde de référence

À la surface de l'ellipsoïde de référence, la pesanteur peut s'écrire (formule de Somigliana)

$$\gamma = \frac{a\gamma_E \cos^2 \lambda + b\gamma_P \sin^2 \lambda}{\sqrt{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda}}$$

où a et b sont le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipsoïde de référence et γ_E et γ_P les pesanteurs normales équatoriales et polaires sur l'ellipsoïde, λ la latitude.

De cette formule, on peut dériver une forme linéaire (dite approximation de Chebychev), pour éviter l'extraction de la racine carrée:

$$\gamma \simeq \gamma_E [1 + a_2 \sin^2 \lambda + a_4 \sin^4 \lambda + a_6 \sin^6 \lambda + a_8 \sin^8 \lambda \dots]$$

plus précise que la formule conventionnelle:

$$\gamma \simeq \gamma_E [1 + f^* \sin^2 \lambda - f_4 \sin^2 2\lambda]$$

Pour le système géodésique GRS 80 du CNES, on a:

$$\gamma_E = 9.7803267715 \text{ m/s}^2 \quad \text{et} \quad \gamma_P = 9.8321863685 \text{ m/s}^2$$

La forme linéaire

$$\gamma \simeq \gamma_E [1 + 0.0052790114 \sin^2 \lambda + 0.0000232718 \sin^4 \lambda + 0.0000001262 \sin^6 \lambda + 0.0000000007 \sin^8 \lambda]$$

présente une erreur relative de 10^{-10} correspondant à $10^{-3} \text{ mm/s}^2 = 10^{-4} \text{ mgal}$.

La série conventionnelle

$$\gamma \simeq 9.780327 [1 + 0.0053024 \sin^2 \lambda - 0.0000058 \sin^2 2\lambda] \quad \text{m/s}^2$$

n'a qu'une précision de $1 \text{ mm/s}^2 = 0.1 \text{ mgal}$.