Formulaire sur les opérateurs différentiels

Soit U(x,y,z) un champ scalaire et $\vec{a}(a_X(x,y,z), a_Y(x,y,z), a_Z(x,y,z))$ un champ vectoriel.

1- Définitions

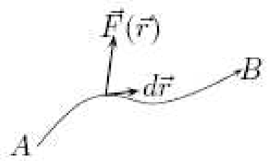
Champs Un *CHAMP* est une fonction de l'espace (une fonction de $\vec{r}$, c'est-à-dire de (x, y, z)) et parfois d'autres variables (comme le temps t).

Un champ *SCALAIRE* est une fontion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$. La pression P, la température T, la masse volumique μ, la charge volumique ρ sont des champs scalaires.

Un champ *DE VECTEURS* est une fonction $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$. Le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$, les courants volumiques $\vec{j}$, le champ électrique $\vec{E}$, le champ magnétique $\vec{B}$ sont des champs de vecteurs.

Circulation Soit $\mathcal{C} = \widehat{AB}$ une courbe et $\vec{F}$ un champ de vecteurs.
On appelle "*CIRCULATION* de $\vec{F}$ le long de $\mathcal{C}$" le nombre $W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Si $\vec{F}$ est une "force", alors W est un "travail".



Flux Soit $\mathcal{S}$ une surface et $\vec{j}$ un champ de vecteurs.
On appelle "*FLUX* de $\vec{j}$ à travers $\mathcal{S}$" le scalaire $I = \int\int_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S}$.

Si $\vec{j}$ est un courant volumique, alors I est un "débit" ou un "courant".

2- Formules de base

1. $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}U) = \vec{\nabla}^2 U$ soit $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U) = \Delta U$

2. $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}U) = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U) = \vec{0}$

3. $\vec{\nabla} . (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = \vec{0}$ soit $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \vec{0}$

4. $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{a}) - \vec{\nabla}^2\vec{a}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \Delta\,\vec{a}$

3- Expressions de l'opérateur GRADIENT dans divers systèmes de coordonnées

$$\vec{\nabla}U = \overrightarrow{grad}\,U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right).\overrightarrow{e_X} + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right).\overrightarrow{e_Y} + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right).\overrightarrow{e_Z}$$

système de coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{grad}\,U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right).\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right).\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right).\overrightarrow{e_Z}$$

système de coordonnées cylindriques

4- Expressions de l'opérateur DIVERGENCE dans divers systèmes de coordonnées

$$\nabla\left(\vec{a}\right) = \vec{\nabla}.\vec{a} = div\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_X}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial a_Y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial a_Z}{\partial z}\right)$$

système de coordonnées cartésiennes

$$div\,\vec{a} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r.a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot a_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

système de coordonnées cylindriques

5- Expressions de l'opérateur LAPLACIEN dans divers systèmes de coordonnées

$$\nabla\left(\vec{\nabla}U\right)=\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}U\right)=\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

système de coordonnées cartésiennes

$$\Delta U=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\left(r.\dfrac{\partial U}{\partial r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$
$$=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

système de coordonnées cylindriques

6- Interprétation succincte des opérateurs "gradient" et "divergence"

Le gradient d'un champ scalaire (par exemple le champ de température ou de pression, ou le potentiel éléctrique) représente la "pente" du champ. Imaginons que le champ H(x,y) représente l'altitude au point M de coordonnées (x,y) sur un massif montagneux, alors le vecteur gradient de H représente la direction la plus difficile à escalader en partant de M, et son opposé – gradient de H représente la direction prise par l'eau de pluie. Le gradient est en tout point normal aux lignes "isoaltitudes" (ou isothermes, ou isobares, ou plus généralement H(x,y)=constante. Dans l'espace ce sont des surfaces H(x,y,z)=constante.

Si on interprètes un champ de vecteurs $\vec{V}(x,y)$ comme un champ de "flux", disons que nous sommes sur une plaque métallique traversée par des courants et que $\vec{V}(x,y)$ est le courant total traversant le point (x,y), alors le réel div($\vec{V}(x,y)$) représente un "bilan de charge" au voisinage du point (x,y); s'il est positif, le point se comporte comme une source de charge, et vice-versa. S'il est nul, le bilan est équilibré, par exemple si V(x,y) représente le champ des vitesses d'un fluide incompressible.