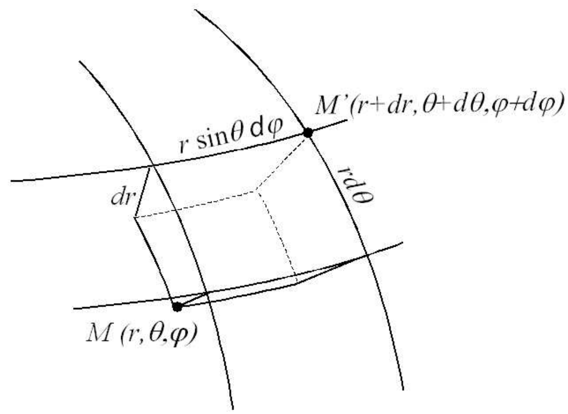
COURS 3

1 Analyse vectorielle

Rappel: Soit un point M en (x, y, z) et $(r\theta, \varphi)$. Soit un point M' proche du point M de coordonnées cartésiennes $[x+dx, y+dy, z+dz]$ et sphériques $[r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi]$. Alors que la projection de $\overrightarrow{MM'}$ sur $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sera respectivement $[dx, dy, dz]$, les projections dans les directions $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ seront $dr, rd\theta, r\sin\theta d\varphi$.



1.1 Gradient

Le gradient d'une fonction f est un vecteur.
En coordonnées cartésiennes, on a:

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\vec{e}_z$$

Pour exprimer le gradient dans la base sphérique, il faut prendre en compte les facteurs d'échelle $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_\varphi = r\sin\theta$.

$$\vec{\nabla} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{r\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{r\sin\theta\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

1.2 Divergence

La divergence d'un vecteur $\vec{A}$ est un scalaire:
$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ représente la divergence d'un champ de vecteur en un point P:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\int\int_{\delta S} \vec{A} \cdot \vec{n} dS}{\delta V}$$

où δV est le volume limité par la surface δS.
Cela représente le flux, par unité de volume, du vecteur $\vec{A}$ à travers la surface ΔS. Si $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ est positive dans le voisinage du point P cela signifie que le flux est positif en P, et P s'appelle une source. De même, si $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ est négative dans le voisinage du point P, le flux est un "flux-rentrant"et P s'appelle un puits. Si, dans un domaine, il n'y a ni source ni puits, alors $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{O}$, et le champ de vecteur $\vec{A}$ est dit solénoidal.

En coordonnées cartésiennes, on a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z}$$

En coordonnées sphériques:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi}\Big[\frac{\partial(h_\theta h_\varphi A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(h_r h_\varphi A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(h_\theta h_r A_\varphi)}{\partial \varphi}\Big]$$

ou encore:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\Big[\frac{\partial(r^2 \sin\theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial \varphi}\Big]$$

Théorème de divergence de Gauss (appelé aussi théorème d'Ostrogradski): si V est un volume limité par une surface fermée S et si $\vec{A}$ est une fonction vectorielle possédant des dérivées continues alors:

$$\int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv = \int\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

où $\vec{n}$ est la normale dirigée vers l'exterieur de S.

Exercice: calculer $\int\int_S \vec{r} \cdot \vec{n} dS$.

1.3 Rotationnel

Le rotationnel d'un champ de vecteur $\vec{A}$ est un vecteur. Il est lié aux propriétés de rotation du champ $\vec{A}$.
En coordonnées cartésiennes, on a:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial z} \\ \\ +\frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial x} \\ \\ +\frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial y} \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z}$$

En coordonnées sphériques:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_\theta h_\varphi}\left[\frac{\partial(h_\varphi A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial(h_\theta A_\theta)}{\partial\varphi}\right] \\ \frac{1}{h_r h_\varphi}\left[\frac{\partial(h_r A_r)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(h_\varphi A_\varphi)}{\partial r}\right] \\ \frac{1}{h_\theta h_r}\left[\frac{\partial(h_\theta A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(h_r A_r)}{\partial\theta}\right] \end{pmatrix}_{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial(A_\theta)}{\partial\varphi}\right] \\ \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_r)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\sin\theta A_\varphi)}{\partial r}\right] \\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial\theta}\right] \end{pmatrix}_{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi}$$

1.4 Laplacien

La divergence du gradient d'une fonction scalaire f est appelé **Laplacien**.
En coordonnées cartésiennes on a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}$$

En coordonnées sphériques:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{h_\theta h_\varphi}{h_r}\frac{\partial f}{dr}\Big) + \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{h_r h_\varphi}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{h_\theta h_r}{h_\varphi}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\Big)\Big]$$

ou encore

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\sin\theta\frac{\partial f}{dr}\Big) + \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\Big) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\Big)\Big]$$

1.5 Quelques propriétés

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{O}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

1.6 Exercice 1 : Rotation en bloc

Soit une Terre sphérique qui tourne autour de son axe $\vec{e}_z$ avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}$. La vitesse en tout point de la Terre s'écrira : $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
Calculer en utilisant les coordonnées cartésiennes, puis sphériques, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ et $\vec{\nabla} \times \vec{v}$.

1.7 Exercice 2

Soit la fonction: $f(x,y,z) = 3xz$

Calculer $\vec{\nabla} f$, $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$

1.8 Exercice 3

Soit la fonction: $f(r, \theta, \varphi) = 3r^2 \cos\theta \sin\theta \cos\varphi$

Calculer $\vec{\nabla} f$, $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$

2 Calcul indiciel

Remarques préliminaires : on est dans un espace à 3 dimensions (x, y, z par exemple).

- Soit un vecteur $\vec{v}$: on note ses composantes v_i pour $i = 1..3$. $\vec{v}$ a donc 3 composantes.
- si on s'interesse au gradient de ce vecteur dans les 3 directions, on obtiendra $a_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. La quantité a_{ij} pour $i = 1..3, j = 1..3$ aura 9 composantes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- a_{ijk} pour $i = 1..3, j = 1..3, k = 1..3$ aura 27 composantes

2.1 Convention d'Einstein

$$C_j = a_i b_{ij} = \sum_i a_i b_{ij}$$

$a_i b_{ij}$ aura 3 composantes. En effet, i est repété $\Rightarrow$ on somme sur i.
Remarque: $a_i b_{ij} = a_k b_{kj}$: c'est un indice muet (car indice de sommation).

2.2 Symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Par exemple:

$$\delta_{ij} x_i x_j = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

2.3 Symbole d'antisymétrie

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si permutation circulaire} \\ -1 & \text{si non permutation circulaire} \\ 0 & \text{si 2 indices egaux au moins} \end{cases}$$

Exemple: $\epsilon_{123} = 1;\qquad \epsilon_{213} = -1;\qquad \epsilon_{112} = 0$

Exercice: $A = (a_i);\quad B = (b_i).\qquad$ Calculer $\vec{A}.\vec{B}$ et $\vec{A} \times \vec{B}$.

- $\vec{A}.\vec{B} = a_i b_i$
- $(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \qquad {}_i -> i$ ieme composante.

2.4 Propriétés

- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}$
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

Exercice: Calculer $\vec{X} \times (\vec{Y} \times \vec{Z})$.

Posons $\vec{V} = \vec{Y} \times \vec{Z} \quad \Rightarrow \quad V_k = \epsilon_{klm} Y_l Z_m$.

$$\begin{aligned}
[\vec{X} \times (\vec{Y} \times \vec{Z})]_i &= \epsilon_{ijk} X_j V_k \\
&= \epsilon_{ijk} X_j \epsilon_{klm} Y_l Z_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) X_j Y_l Z_m \\
&= \delta_{il} X_j Y_l Z_j - \delta_{im} X_j Y_j Z_m \\
&= X_j Z_j Y_i - X_j Y_j Z_i
\end{aligned}$$

On a donc:

$$\vec{X} \times (\vec{Y} \times \vec{Z}) = (\vec{X} \cdot \vec{Z})\vec{Y} - (\vec{X} \cdot \vec{Y})\vec{Z}$$

2.5 Notations

En coordonnées cartésiennes, on notera:

- $\dfrac{\partial a}{\partial x_i} = \partial_i a = a_{,i}$
- $\dfrac{\partial a_j}{\partial x_i} = \partial_i a_j = a_{j,i}$
- $\partial_i \partial_j a = a_{,ij}$
- $\vec{\nabla}\varphi \quad \rightarrow \quad \partial_i \varphi = \varphi_{,i}$.
- $\vec{\nabla}.\vec{u} \quad \rightarrow \quad \partial_i u_i = u_{i,i}$.
- $\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad \rightarrow \quad v_i = \epsilon_{ijk}\partial_j u_k = \dfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\partial_j u_k - \partial_k u_j)$

2.6 Exercices

2.6.1 Exercice 1

Calculer, en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées sphériques et enfin en utilisant des notations indicielles le vecteur $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi)$

2.7 Exercice 2

En utilisant les notations indicielles, retrouver les propriétés suivantes:

- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = \vec{O}$
- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{O}$
- $\vec{\nabla} \cdot (\varphi\Psi) = \varphi\vec{\nabla}\Psi + \Psi\vec{\nabla}\varphi$
- $\vec{\nabla} \cdot (\varphi\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}\varphi + \varphi\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- $\vec{\nabla} \times (\varphi\vec{A}) = \varphi\vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla}\varphi$
- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = -\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$
- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$
- $\vec{\nabla} \times (\varphi\vec{\nabla}\Psi) = \vec{\nabla}\varphi \times \vec{\nabla}\Psi$
- $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$