

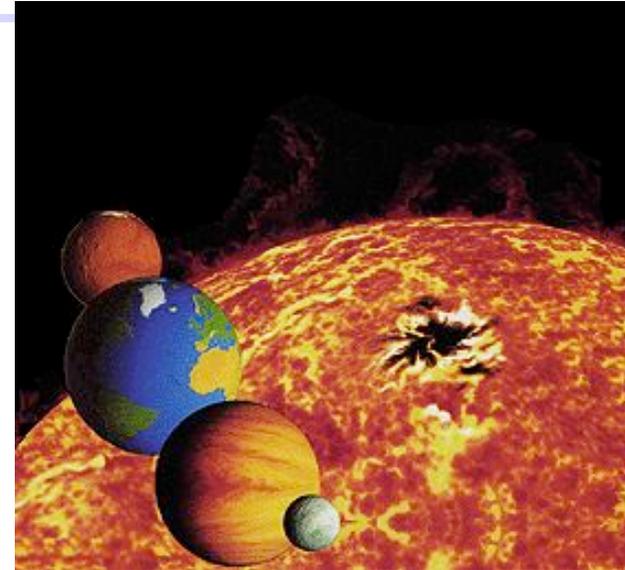
Planétologie Comparée

Philippe Lognonné
Lognonne@ipgp.jussieu.fr

Département de Géophysique Spatiale et Planétaire
Institut de Physique du Globe de Paris

Planètes telluriques

- Mercure, Venus, Terre, Mars
 - Toutes à moins de 2 UA du soleil
 - Terre et Venus $\sim 90\%$ de la masse



	Planètes telluriques				Planètes géantes				
	Mercure	Venus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
Période de rotation [d ^a]	58.65	243.0 ^b	0.9973	1.026	0.4135	0.4440	0.7183 ^b	0.6713	6.387 ^b
Inclinaison sur orbite[°]	0.5	177.4	23.45	25.19	3.12	26.73	97.86	29.56	122.5
Distance Orbitale [UA ^c]	0.3871	0.7233	1.000	1.524	5.203	9.572	19.19	30.07	39.54
Période orbitale [a ^d]	0.2410	0.6156	1.001	1.882	11.87	29.39	84.16	165.0	248.8
Masse [10 ²⁴ kg]	0.3302	4.869	5.974	0.6419	1899.	568.46	86.63	102.4	0.0131

Quelques livres et ouvrages

- Planetary Sciences, I de Pater, J.L.Lissauer, Cambridge, University press, 2001
- Solar System Evolution, a new perspective, Cambridge, University press, 2001
- Le système solaire, InterEditions/Editions CNRS, T.Encrenaz, J.P.Bibring, M.Blanc, 1987
- Mars: histoire d'un autre Monde, F.Forget, F.Costard, P.Lognonné, Editions Belin, 2003

Information géophysique: structure Interne

	Mercure	Venus	Terre	Mars	Lune	Ganymede	Io
Rayon	0,38	0,95	1	0,54	0,27	0,41	0,28
Masse	0,055	0,815	1	0,107	0,012	0,018	0,015
Masse volumique	5430	5250	5515	3940	3340	1940	3554
Masse volumique non comprimée	5300	4000	4100	3800	~3300	1800	~3500
Moment d'Inertie	0,34	?	0,3355	0,3662	0,3905	0,3105	0,378
Rayon Noyau	0,8	0,55	0,546	0,5	0,25	0,30	0,50
Sismologie	NON	NON	OUI	NON	OUI	NON	NON

Information géochimique: structure interne

Génésis (NASA): Vent solaire
Lancement : 8 août 2001
Retour : Septembre 2004
< xx mg

Stardust : Grains cométaires
Lancement : 7 Février 1999
Retour : Janvier 2006
< xx mg

Mars
Lancement: > 2013
Retour: 3 ans après
0,5-2 Kg ?

Muses-C (ISAS) : Astéroïde 1998 SF36
Lancement : Novembre/décembre 2002
Retour : Juin 2007
< xx mg

Apollo (NASA) et Luna (USRR) : Lune
Apollo 11 16-24 Juillet 1969, 20 Kg,
Apollo 12 14-24 Novembre 1969, 34 Kg
Luna 16 12-24 septembre 1970, 101 g
Apollo 14 31 Janvier- 9 Février 1971, 42 Kg
Apollo 15 26 Juillet-7 août 1971, 66 Kg
Luna 20 14 février- 25 février 1972, 30 g
Apollo 16 16-27 Avril 1972, 96 Kg
Apollo 17 7-19 Décembre 1972, 110 Kg
Luna 24 9 août-22 août 1976, 170g



- Mais aussi des échantillons venus naturellement sur Terre
 - Météorites Lunaires
 - Météorites Martiennes (SNC)
 - Météorites de Cères (Eucrites)

Contraintes cosmogéochimiques sur le noyau

	1	2	3	4	5	6	7
Manteau + croûte							
Mg/(Mg+Fe)	0,79	0,77	0,67	0,77	0,66	0,75	0,72
Masse relative	73,6	74,3	88,1	81	81,8	78,3	80,8
Noyau							
Fe	76,2	60,4	72	88,1	63,7	77,8	88,1
Ni	6,2	5,8	9,3	8	8,2	8	11,1
Co	-	-	-	0,4	-	-	0,3
Cu	-	-	-	-	-	-	0,1
S	17,6	33,8	18,6	3,5	9,3	14,2	0,4
O	-	-	-	-	18,7	-	-
Masse relative (%)	26,4	25,7	11,9	19,0	18,2	21,7	19,2

- 1: Formation à partir d'une nébuleuse de composition solaire en équilibre adiabatique pression-température (Goettel, 1983)
- 2: Formation à partir d'une nébuleuse avec zones d'accrétion modifiées (Weidenschilling, 1972)
- 3: Mélange de chondrites contraint par la densité moyenne et le moment d'inertie hydrostatique (Anderson, 1972)
- 4: Mélange de chondrites contraint par la minéralogie de surface mesurée par Viking et Mars 5 (Morgan et Anders, 1979)
- 5: 30% de chondrite C1/Orgueil et 70% mélange chondritique hautes températures (Ringwood, 1981)
- 6: FeO (Manteau) et Fe noyau contraint par les météorites SNC (manteau) et bilan global de Fer (Wänke et Dreibus, 1988)
- 7: Fer et S contraint par la teneur en Co et Cu du manteau martien (estimé grâce aux SNC), (Gaetani et Grove, 1997)

Les premières mesures astronomiques

- Mars a deux satellites: Phobos et Deimos
 - La mesure des périodes et demi-grand axes donne la masse de Mars avec lois de Kepler
 - 0.16% (Hall, 1878), $3 \cdot 10^{-4}$ % (Mariner 4, 1965), $< 10^{-4}$ % (Mariner 9-Viking, 1976)
 - La planète est elliptique: faible perturbation de la trajectoire de Phobos: paramètre J_2
 - La planète ne se déforme pas immédiatement avec la marée de Phobos: viscosité de la planète et coefficient de qualité associé
- Paramètres géophysiques:
 - Densité moyenne : 3933.5 kg/m^3
 - Rayon moyen et aplatissement: 3389.92 km , $1/160$
 - J_2 et décalage entre centre de masse et de figure: $1,96 \cdot 10^{-3}$; 2.5 km
 - Coefficient d'atténuation moyenne : 50-150

Champ de gravité d'une planète

Dans le cas général, le potentiel d'attraction d'une planète en un point \mathbf{r} à l'extérieur de la planète

$$U(r) = -G \iiint \frac{\rho dV}{D}$$

où D est la distance entre une particule de la planète et le point courant. En utilisant

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \chi) \right]$$

où χ est l'angle entre le rayon \mathbf{r} et rayon d'un point courant de l'intérieur de la planète. En utilisant

$$P_n(\cos \chi) = P_n(\cos \theta_1) P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^{m=n} P_n^m(\cos \theta_1) P_n^m(\cos \theta) \cos[m(\phi_1 - \phi)]$$

on obtient

$$U(r) = -\frac{GM}{r} \left[1 - \left[\sum_{n=2}^{n=\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] + \sum_{n=2}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n^m(\cos \theta) (C_{nm} \cos m\phi + S_{nm} \sin m\phi) \right]$$

avec

$$J_n = \frac{1}{M} \iiint dV \rho \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta)$$

$$C_{nm} = \frac{1}{M} \iiint dV \rho \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi$$

$$S_{nm} = \frac{1}{M} \iiint dV \rho \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi$$

(θ est la co-latitude)

Les **polynômes de Legendre** sont des solutions y de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + l(l + 1)y = 0$$

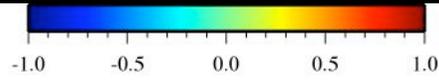
où l est un entier naturel représentant l'ordre du polynôme.

Les premiers polynômes sont :

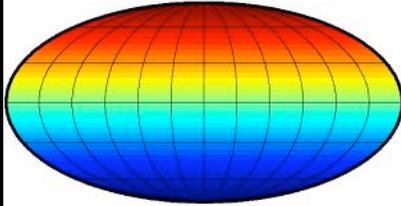
- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
- $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
- $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
- $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

La relation de récurrence entre les différents polynômes s'écrit:

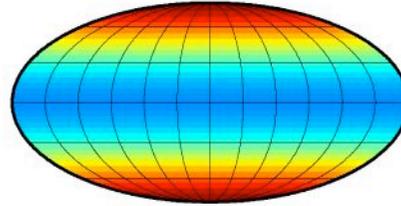
- $P_n(x) = \frac{1}{n}((2n - 1)xP_{n-1}(x) - (n - 1)P_{n-2}(x))$



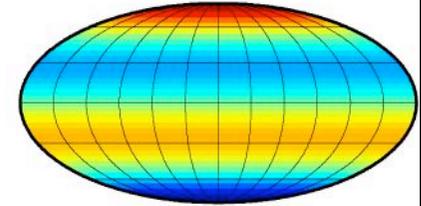
$l=1, m=0$



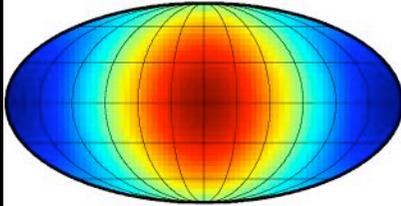
$l=2, m=0$



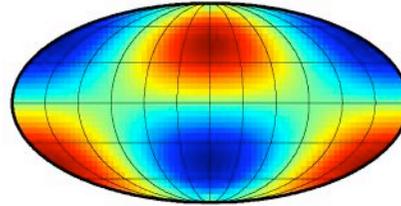
$l=3, m=0$



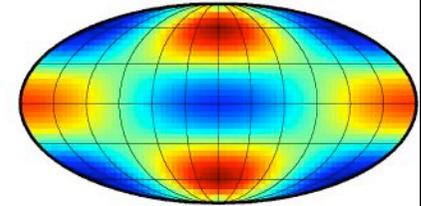
$l=1, m=1$



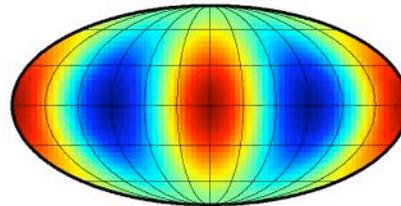
$l=2, m=1$



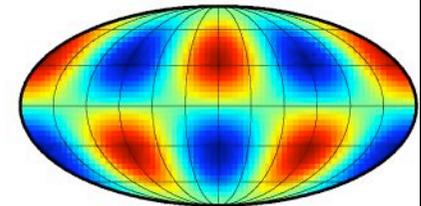
$l=3, m=1$



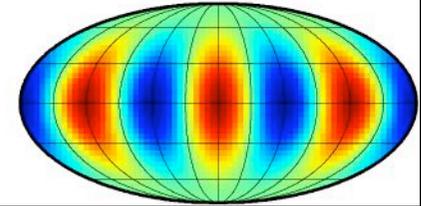
$l=2, m=2$



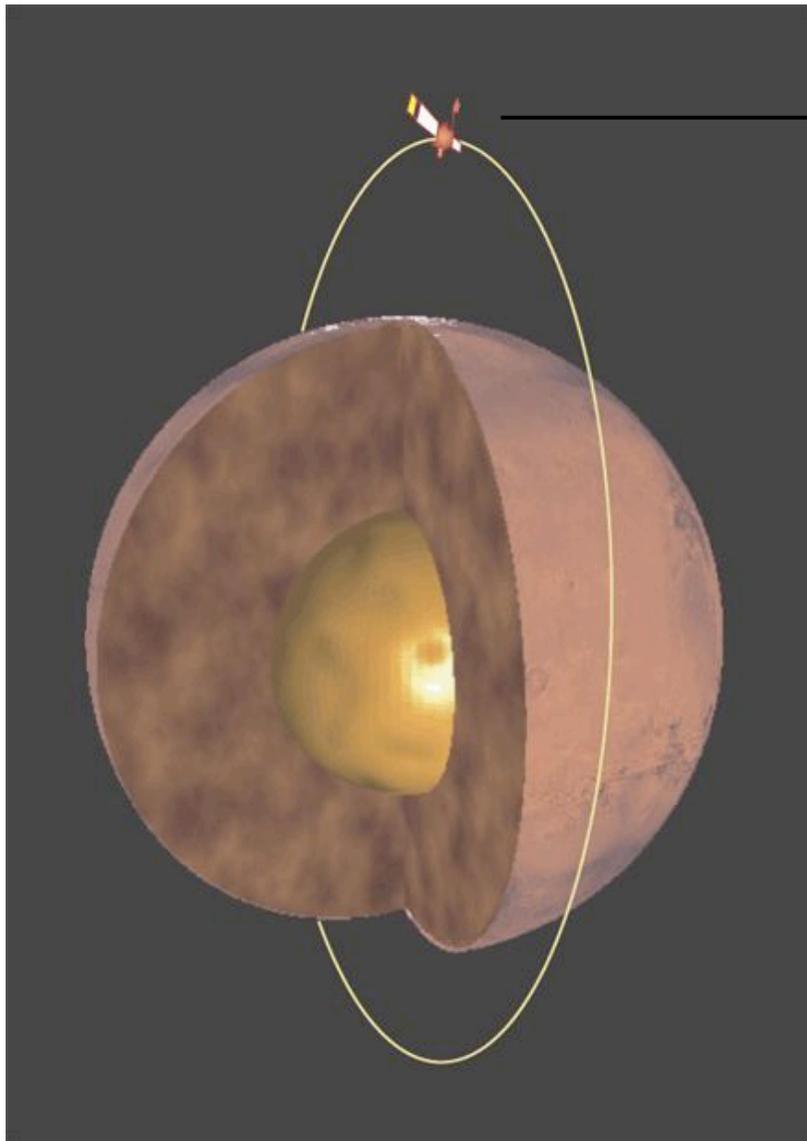
$l=3, m=2$



$l=3, m=3$



Comment mesurer la gravité depuis l'orbite?



Signal Radio vers la Terre

$$\vec{F} = m\vec{a} = \int_V \frac{G \rho dV}{|r - r_{\text{quasicentr}}|^2} \hat{r}$$

La force agissant sur le satellite dépend de la gravité

La fréquence du signal dépend de la vitesse du satellite via un effet Doppler:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

Comme

$$a = \frac{dv}{dt}$$

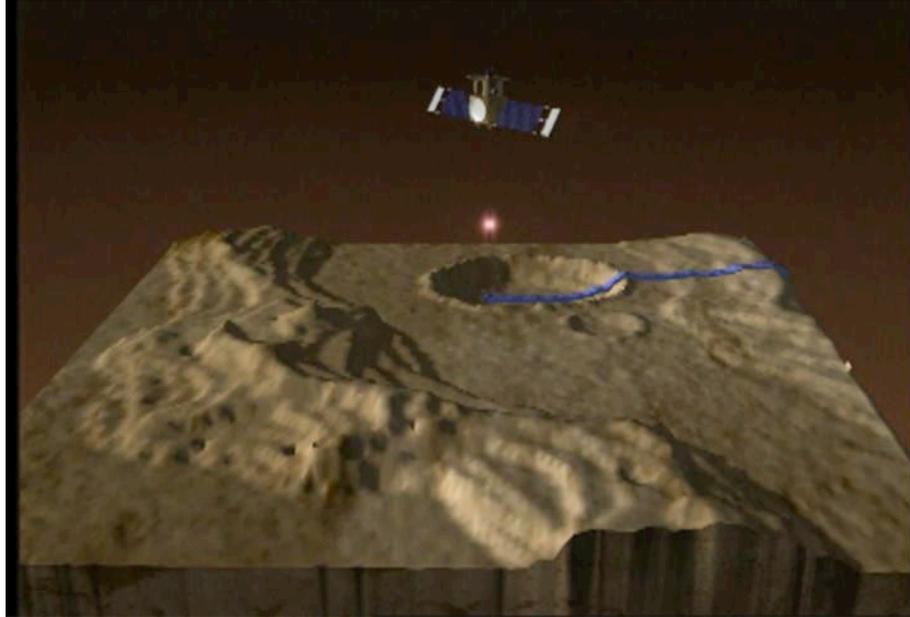
Le champ de gravité peut être obtenu après analyse

Mars: Mesures de gravité: principe et évolution



- Mariner 9: première mesure grâce à l'effet Doppler (Bande S): par exemple Lorell, 1972, Born, 1974
 - Ellipticité et grande structures $s < 4$
- Mariner 9 + Viking (Gapcynski et al., 1977, Christensen et Balmino, 1979, Balmino et al., 1982)
 - Grande structures tectoniques $s < 16$
- Mars Global Surveyor: mesure en Bande X (moins d'effets de plasma) très fine (erreur de vitesse $< 100 \mu\text{m/s}$)
 - Structure fines $s < 60-80$
 - Comparaison avec la Terre: 2/3 de la résolution de la mission GOCE, dont le lancement sera en ... 2004

Altimétrie: principe et historique

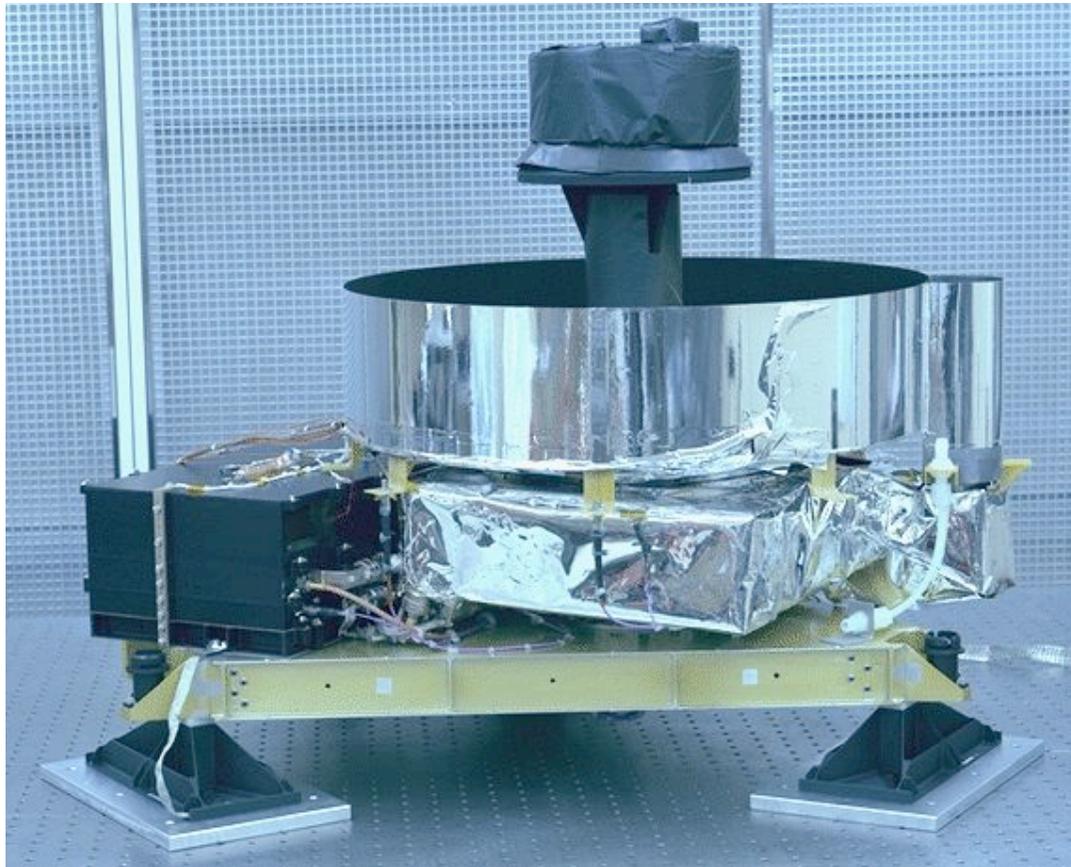


- Première mesure radar depuis la Terre (Goldstone, Aricebo, etc) 200 m de précision
- Mesure d'occultation radio des sondes Mariner 9 et Viking
 - Structure de grande échelle $s < 8$

- MGS: expérience MOLA (Zuber et al.)
 - Résolution latérale (taille du spot): 130-330 m
 - Résolution absolue: 10 m
 - Résolution relative: 35 cm



MOLA: Mars Orbiter Laser Altimeter



Range Precision: ~ 37 cm

Absolute Vertical Resolution: <10 m

Surface Spot Size: 130 m

Along Track Shot Spacing: ~ 330 m

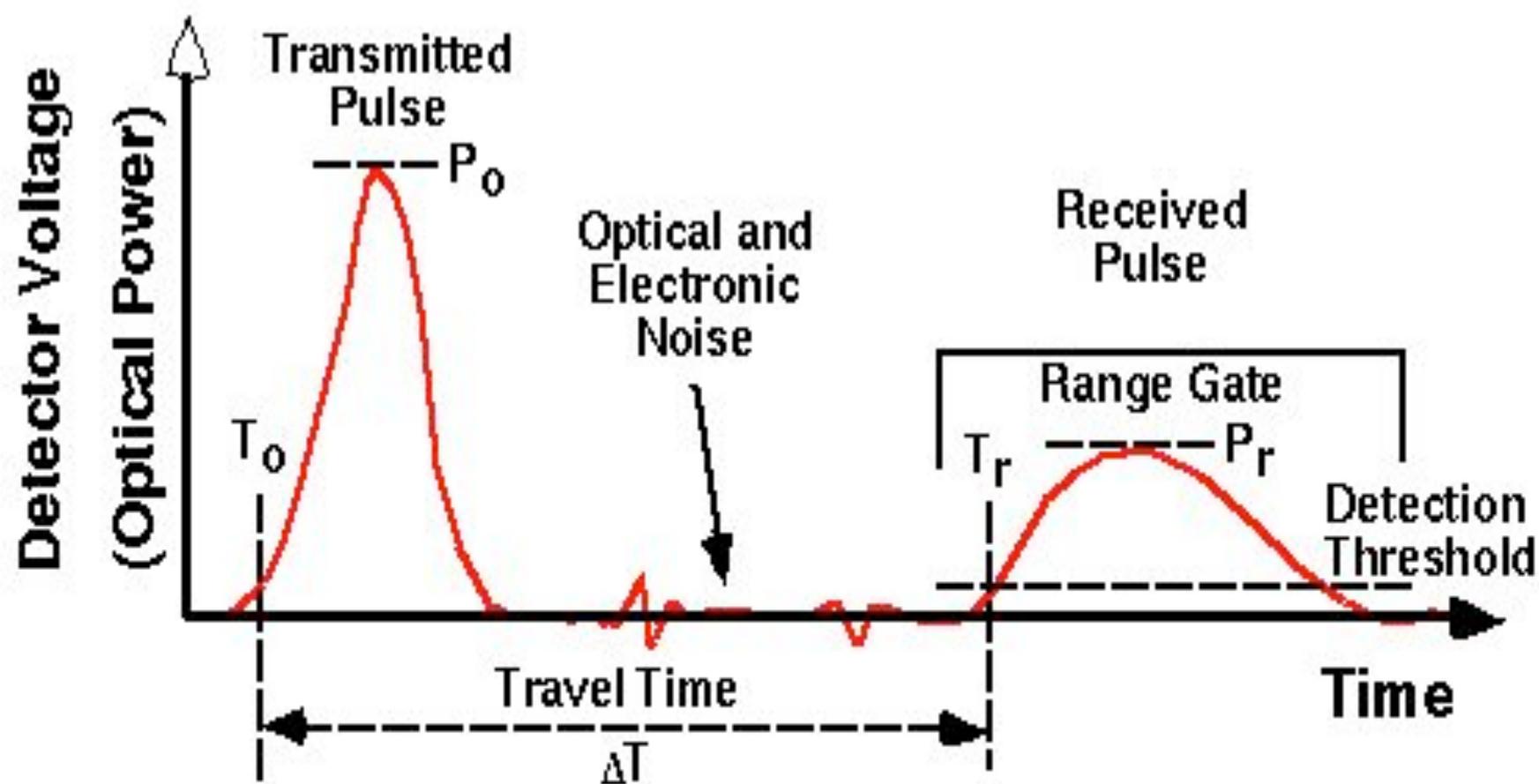
Cross-Track Spacing: ~ 1 -30 km (equator)

Mass: 25 kg

Total number of Shots: ~ 640 Million

Currently acting as a radiometer

LASER RANGING SCHEMATIC



$$\text{Range } z = c \frac{\Delta T}{2}$$

- T_0 = Transmitted pulse time
- P_0 = Transmitted pulse power
- T_r = Received pulse time
- P_r = Received pulse power

Hypothèse hydrostatique

Supposons une planète en équilibre isostatique ,c'est-à-dire pour laquelle

$$0 = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}$$

Conséquence importante :

- $\vec{\nabla}p \times \vec{\nabla}U = \rho\vec{\nabla}U \times \vec{\nabla}U = 0$, p et U sont constant sur les mêmes surfaces
- $\vec{\nabla} \times (\rho\vec{\nabla}U) = \vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}U = 0$, ρ et U sont constant sur les mêmes surfaces
- La surface de la planète, de pression constante, est une équipotentielle (géoïde)

Simplifications faites...

Dans la lithosphère élastique, déviateur de pré-contraintes

- Dans le manteau , forces de viscosité associées à la convection

$$\nabla \cdot \vec{\sigma}_{visq} \approx \frac{\eta v}{L^2} \sim 0.1 \text{ Pa/m}^2 \quad (\eta = 10^{21} \text{ Pa.s}, v = 1 \text{ cm/an} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}, L = 2000 \text{ km} = 2 \cdot 10^6 \text{ m})$$

$$\rho\vec{g} \sim 5 \cdot 10^4 \text{ Pa/m}^2$$

- Dans le noyau, forces de Coriolis, Forces de Lorentz

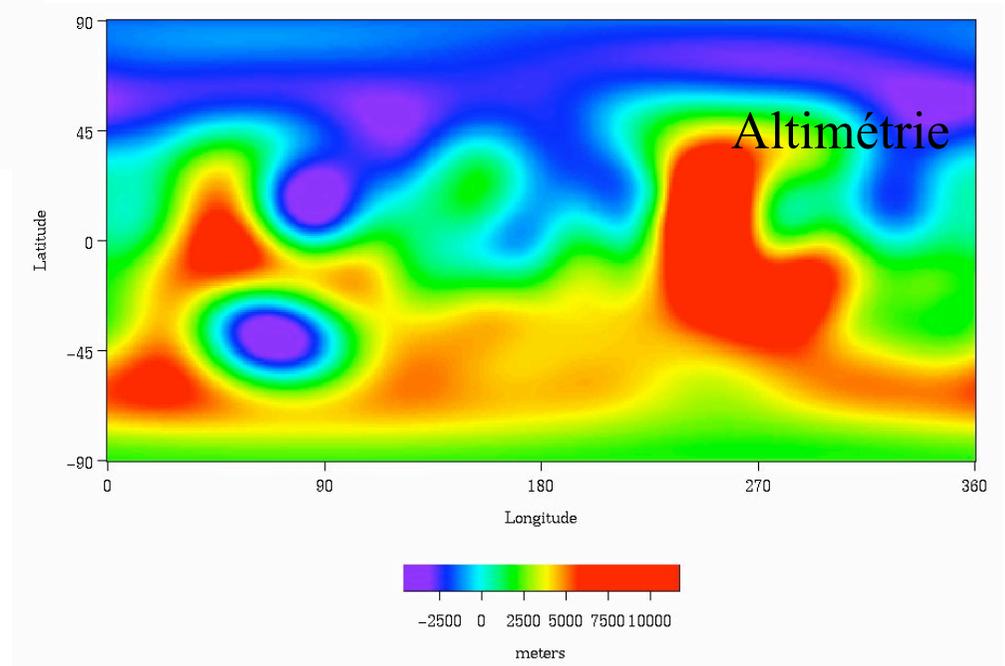
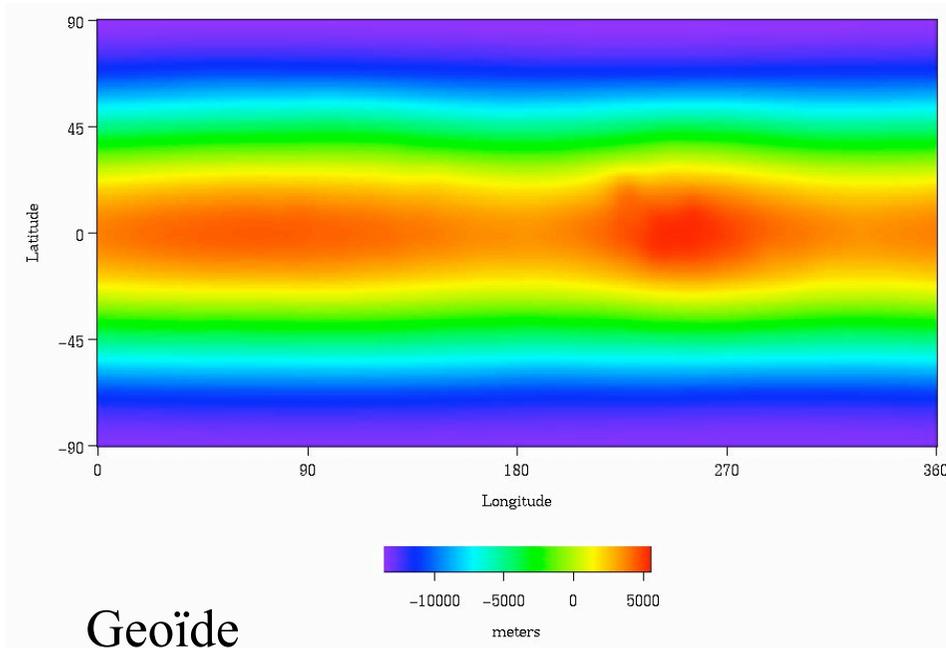
$$-2\rho\vec{\Omega}x\vec{v} \sim 10^{-8} \rho\vec{g} \quad (\Omega \sim 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}, v \sim 0.1 \text{ cm/s} \sim 10^{-3} \text{ m/s})$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times B) \times B \quad (\text{terme magnétique 10 fois plus petit})$$

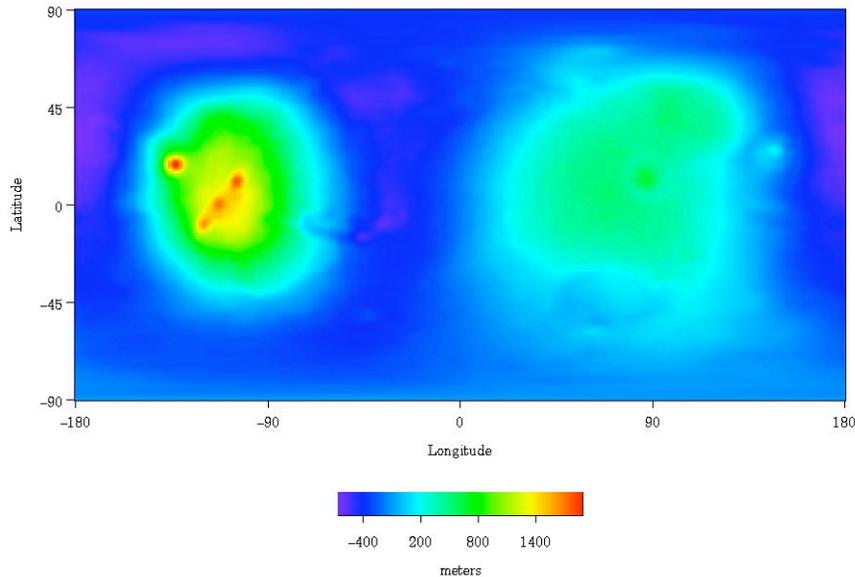
Forces de viscosité négligeables

- Précision des mesures spatiales suffisantes pour détecter les effets des courants mantelliques sur la forme de la planète.

Mariner 9... (1974)

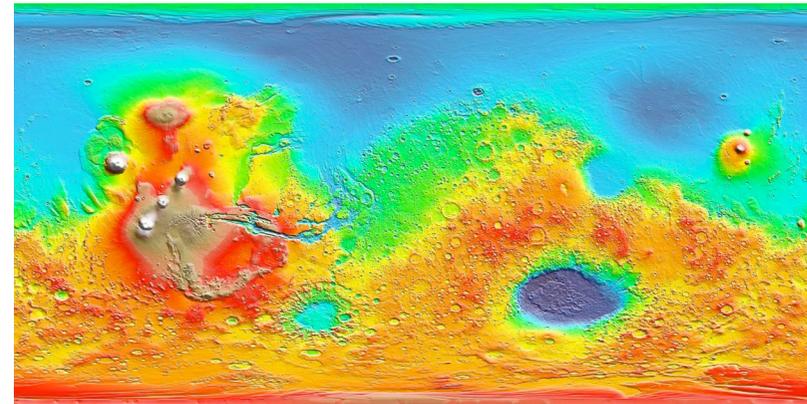


Mars Global Surveyor (1997)

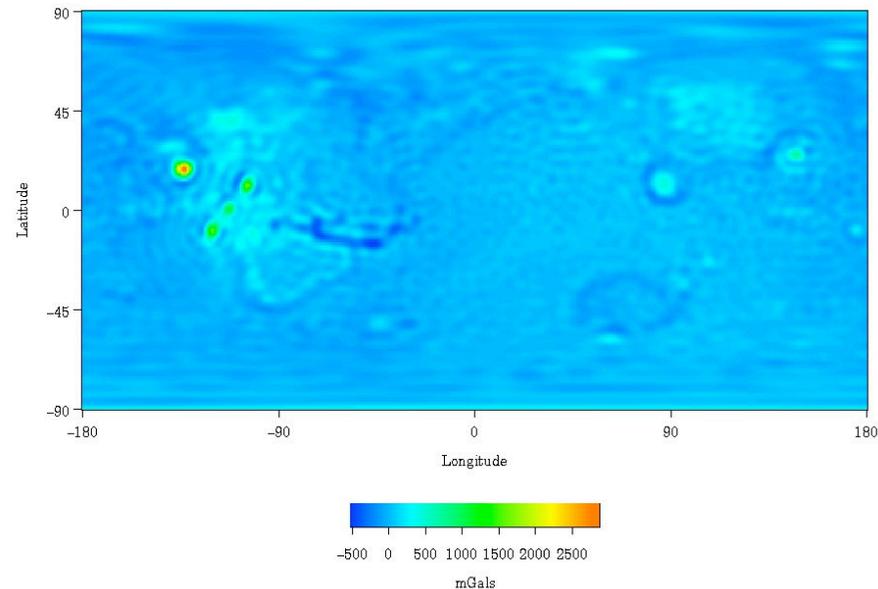


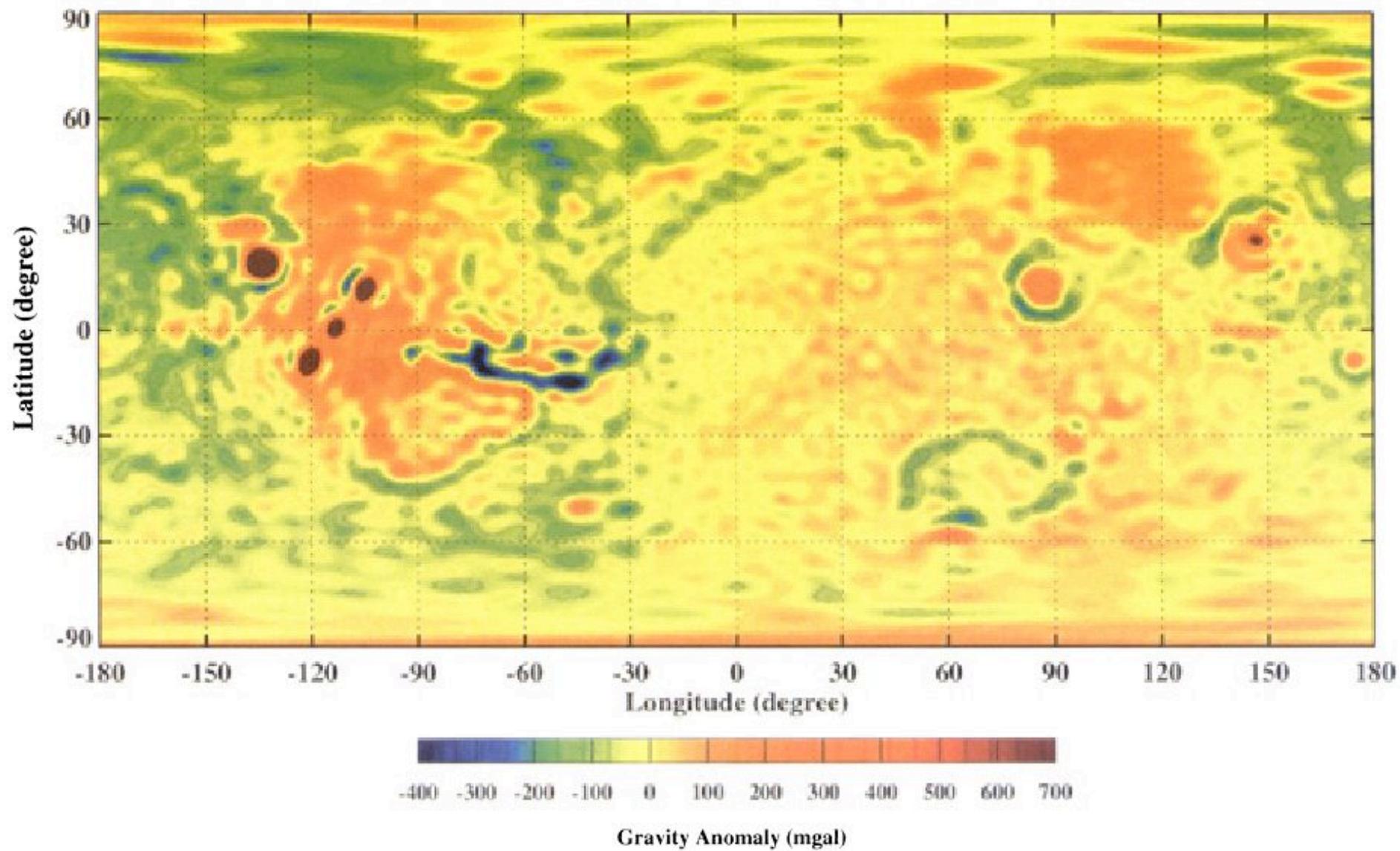
Variation du Géoïde
par rapport à
l'ellipsoïde de référence

Anomalies de gravité
du géoïde par rapport à
l'ellipsoïde de référence

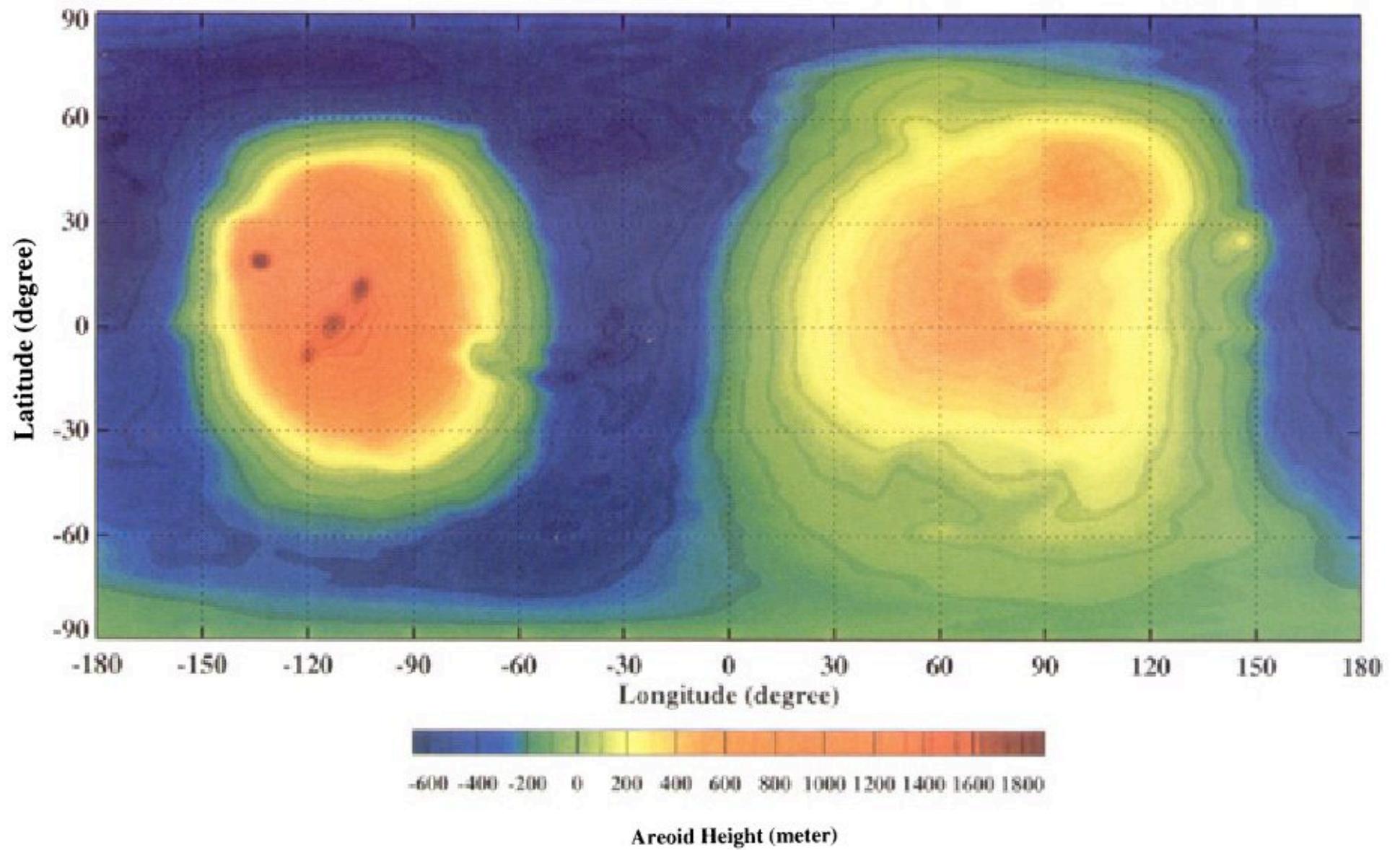


Altimétrie





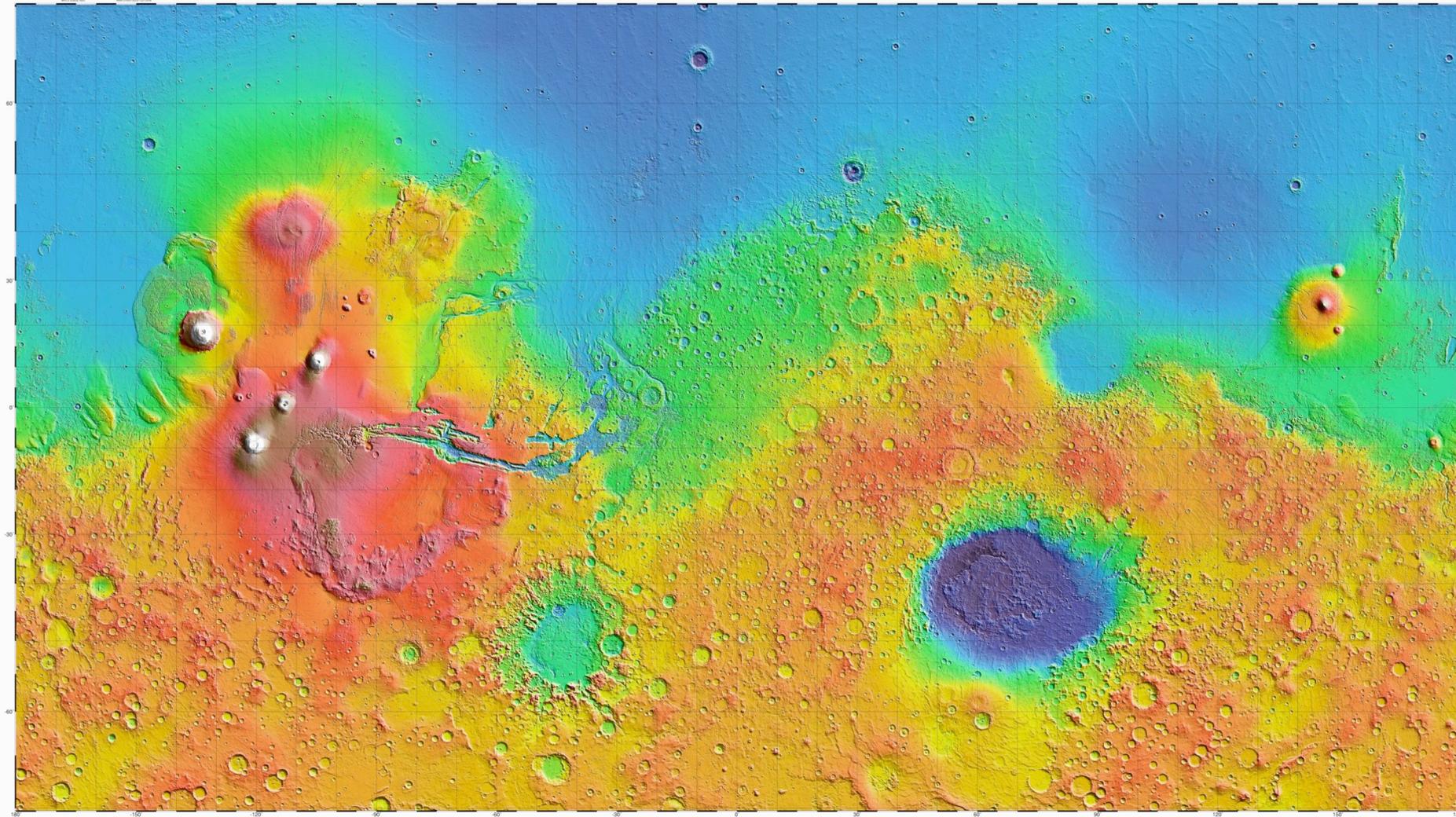
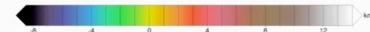
Yuan et al. (2001)

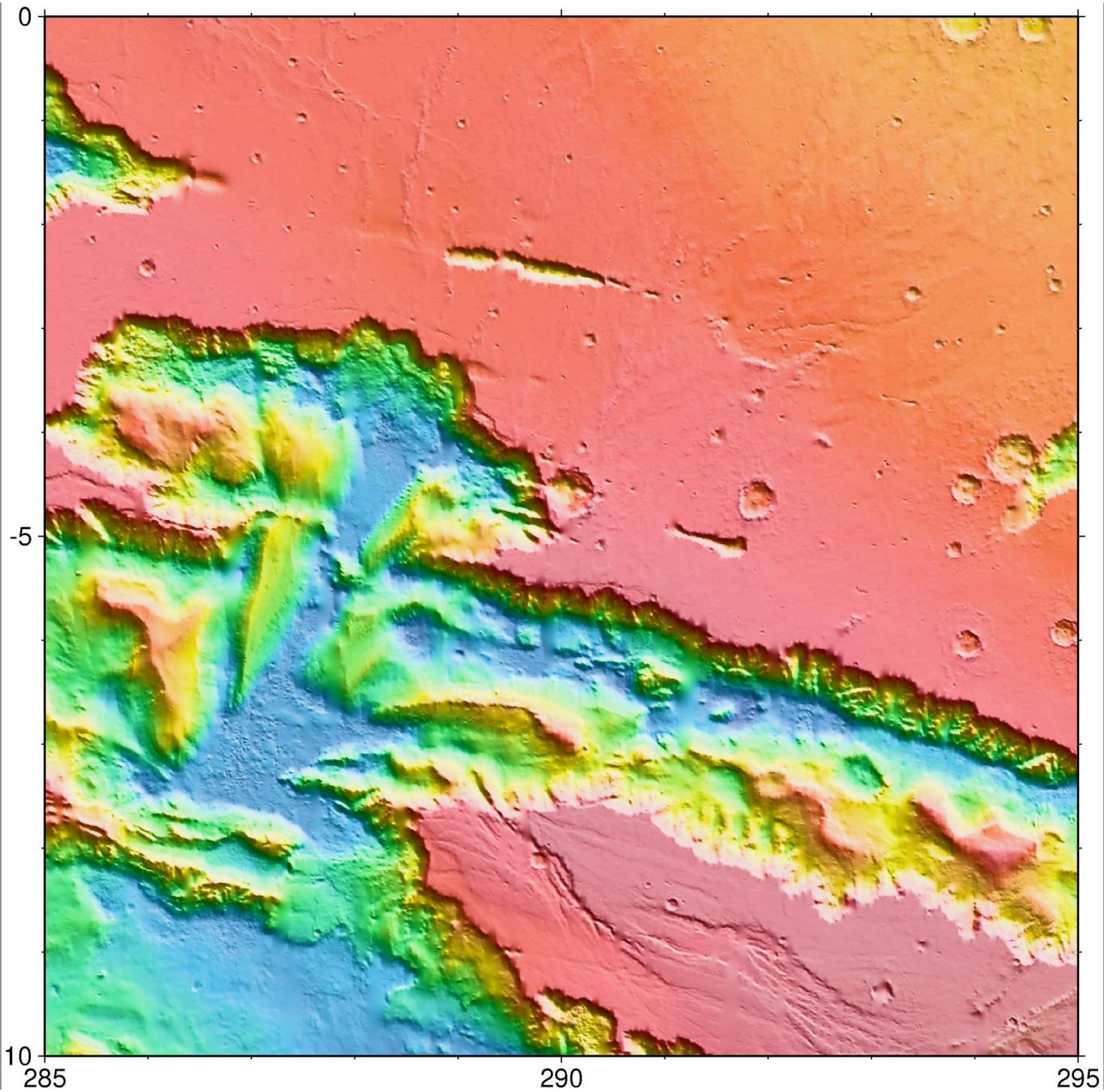


Yuan et al. (2001)

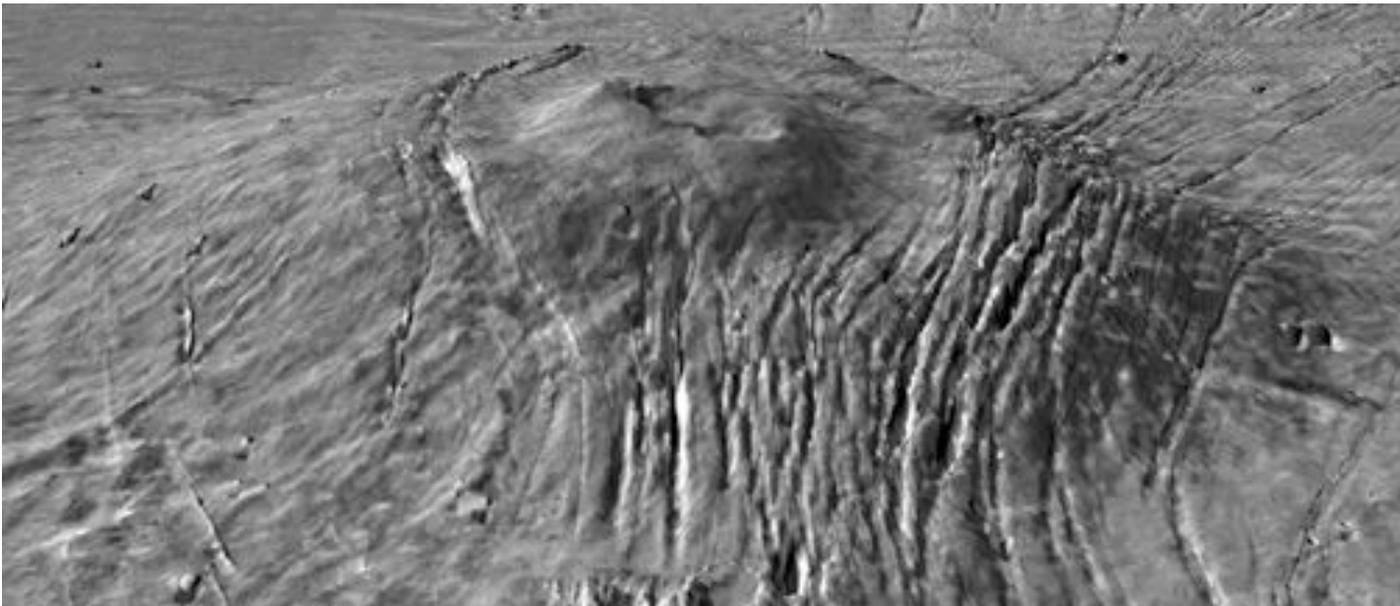
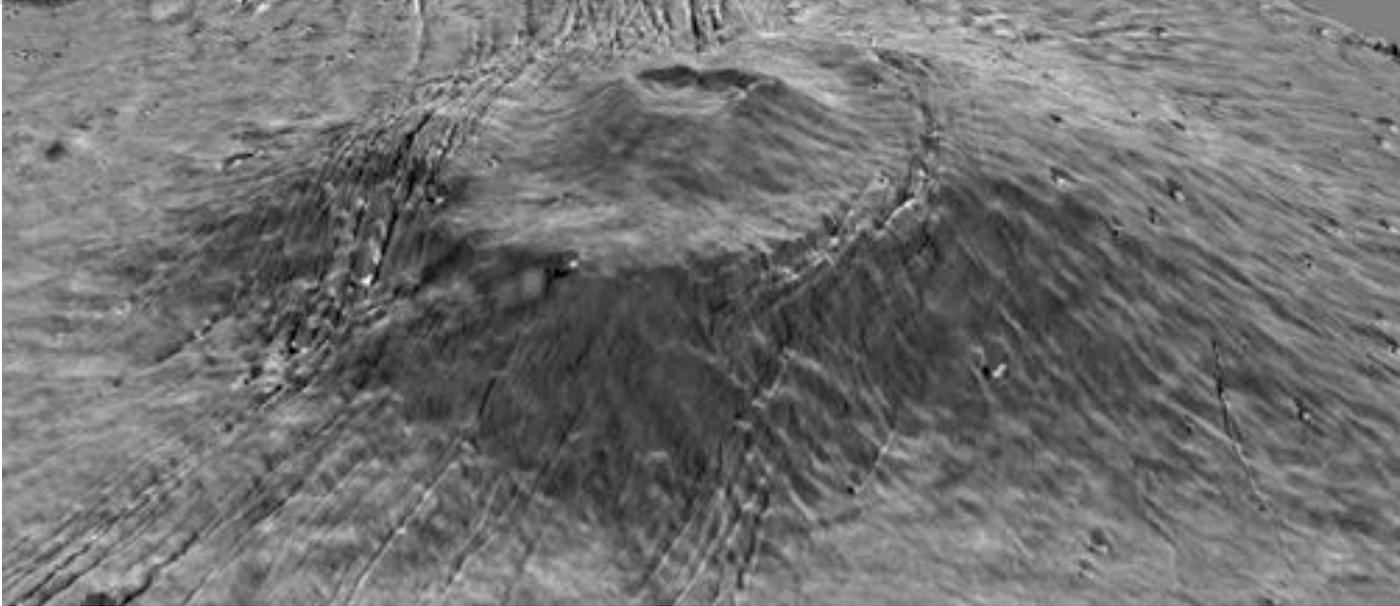


THE TOPOGRAPHY OF MARS BY THE MARS ORBITER LASER ALTIMETER (MOLA)



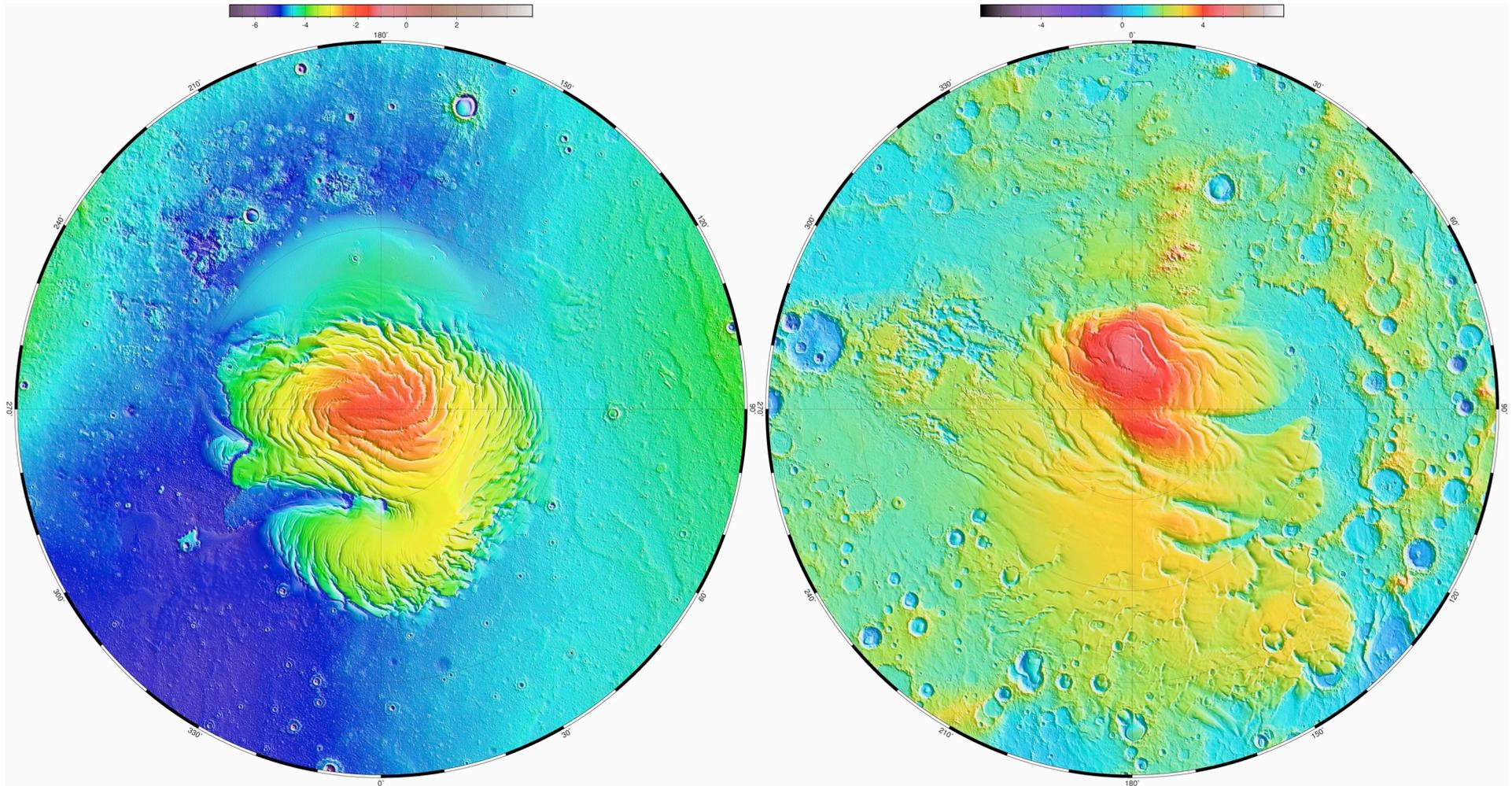


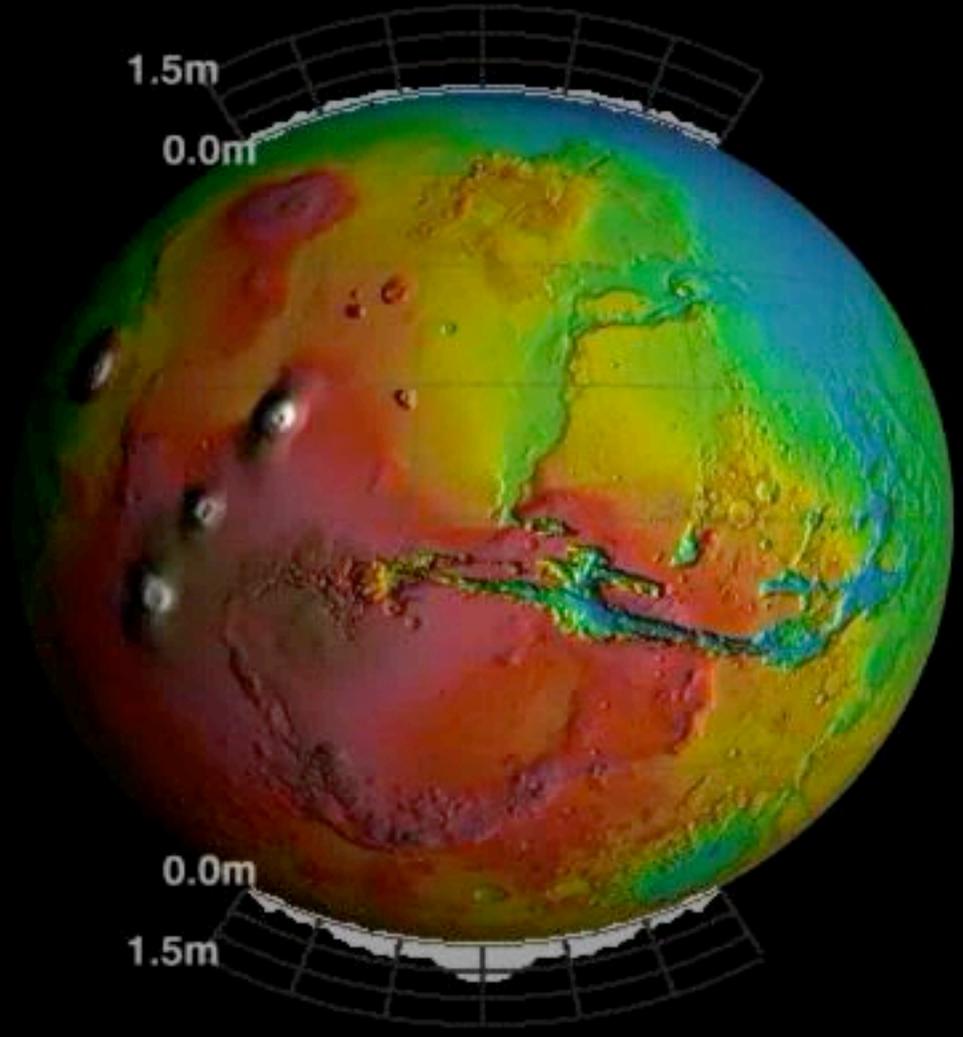
Alba Patera



North Polar Cap

South Polar Cap





Mars Year

J_2

Pour une planète elliptique, le potentiel de gravité (pesanteur) s'écrit:

$$U = -\frac{\mathcal{G}M}{r} + \frac{\mathcal{G}Ma^2}{2r^3}J_2(3\sin^2\theta - 1), \quad \text{gravité}$$

$$U = -\frac{\mathcal{G}M}{r} + \frac{\mathcal{G}Ma^2}{2r^3}J_2(3\sin^2\theta - 1) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \theta, \quad \text{pesanteur}$$

où $J_2 = \frac{C-A}{Ma^2}$. J_2 et $\frac{C-A}{A}$ permettent de trouver A et C . Si la précession n'est pas connue (par exemple pour Vénus, Mercure), il faut faire l'hypothèse d'une planète à l'équilibre hydrostatique.

La surface de la planète est alors une équipotentielle, et donc

$$\begin{aligned} U_0 &= -\frac{\mathcal{G}M}{a}\left(1 + \frac{1}{2}J_2\right) - \frac{1}{2}a^2\omega^2, \\ &= -\frac{\mathcal{G}M}{c}\left(1 - \frac{1}{2}J_2\left(\frac{a}{c}\right)^2\right), \end{aligned}$$

ce qui donne après résolution

$$f = \frac{a-c}{a} = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{a^3\omega^2}{\mathcal{G}M}$$

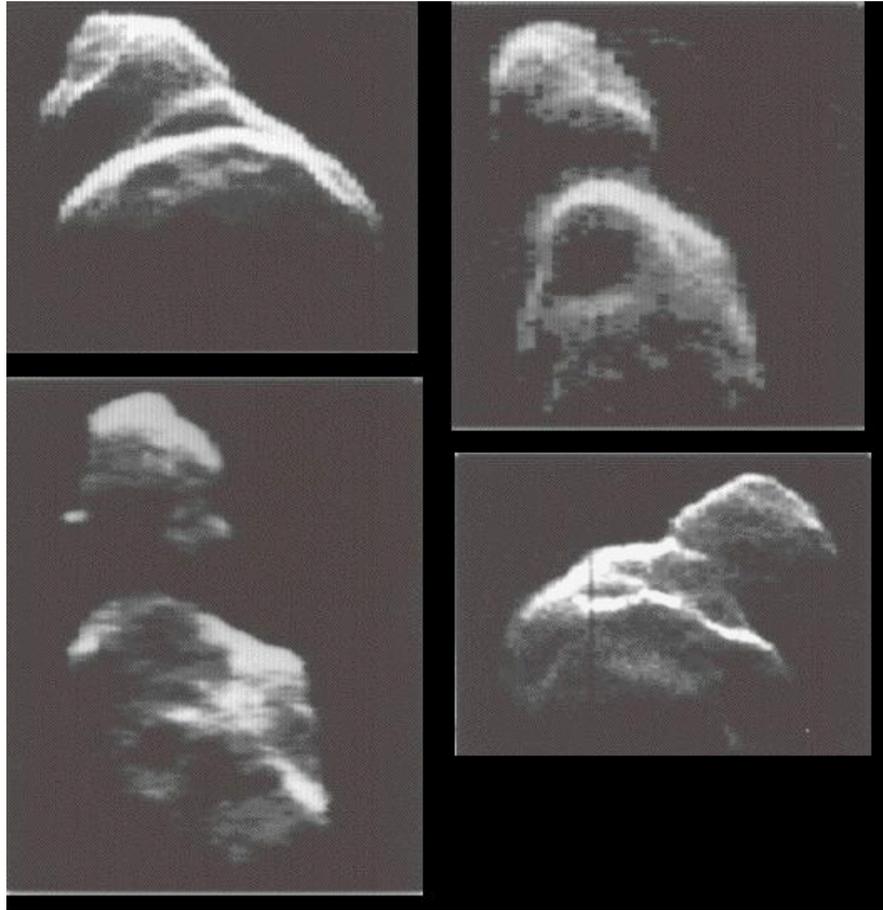
θ est la
latitude

Hypothèse hydrostatique

	$J_2 (10^{-6})$	$J_3 (10^{-6})$	$J_4 (10^{-6})$	$J_5(10^{-6})$	$J_6(10^{-6})$	q_r	I/Mr^2	$F (10^{-3})$	$\Delta F(\%)$
Mercure	60±20					10^{-6}			
Venus	4.46±0.03	- 1.93±0.02	-2.38±0.02			$6.1 \cdot 10^{-8}$			
Terre	1082.627	-2.532 ±0.002	- 1.620±0.003	-0.21	0.65	$3.45 \cdot 10^{-3}$	0.3355	3.35282	0.11
Lune	203,43 ±0.09					$7.6 \cdot 10^{-6}$	0.3932	0.7509	58.85
Mars	1960.5±0.2	31.5±0.5	-15.5±0.7			$4.57 \cdot 10^{-3}$	0.3662	6.117	14.57
Jupiter	14736±1	0	-587±5	0	31±20	0.089	0.254	64.87	-2.67
Saturn	16298±10	0	-915±40	0	103±50	0.155	0.210	97.96	-4.07
Uranus	3343.4±0.3	0	-28.9±0.5			0.029	0.23	22.93	14.89
Neptune	3411±10	0	-35±10			0.026	0.23	17.08	-6.06
Io	1863±90						0.378 ±0.005		
Europe	438±9						0.348 ±0.002		
Ganymède	127±3						0.3105 ±0.003		
Callisto	34±5						0.358 ±0.004		

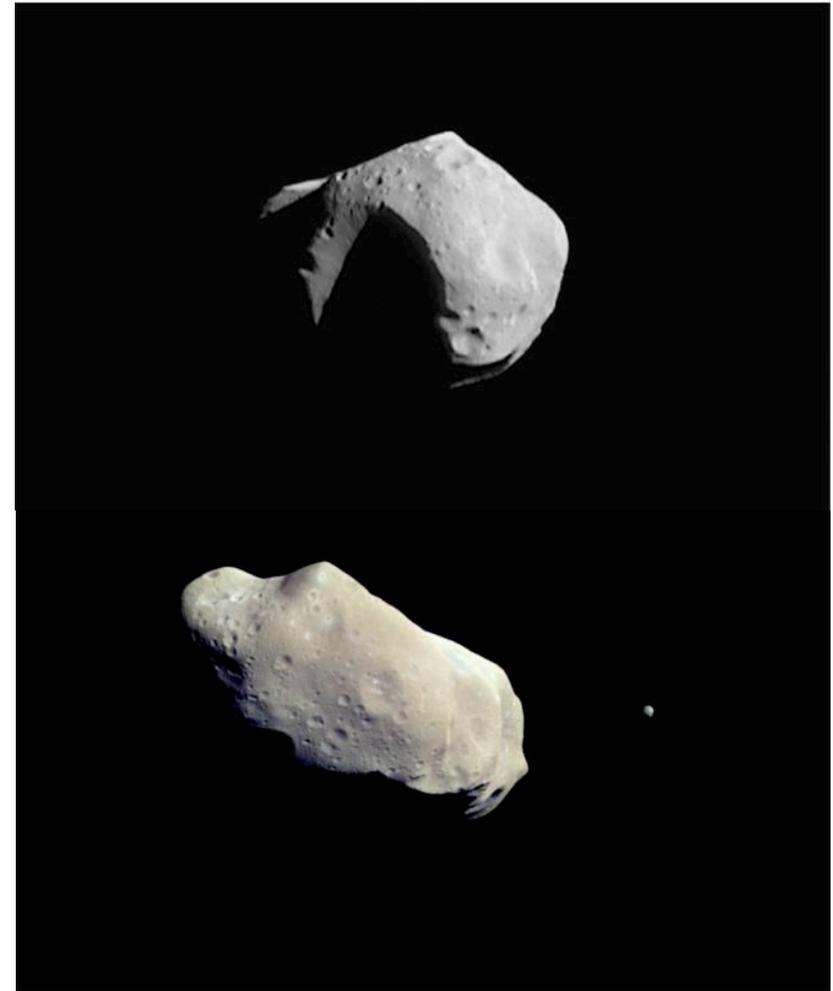
- Planètes telluriques... de moins en moins vrai avec la taille
- Planète géante... effets non linéaire de la théorie

Cas extrême non-hydrostatique



Toutatis (4 km x 2.5 km)
Image Radar-Goldstone

Mathilde (59kmx47 km) -NEAR



IDA (58kmx23) - Galiléo

Données astronomiques: hypothèses et démarches

Masse (M) +
Rayon (a)



Densité moyenne

*Mars a un noyau métallique car aucune
minéralogie du manteau raisonnable
n'est possible sans noyau*

Théorie de Clairaut

+ J_2 (ellipticité)
+ ω_{rotation}



Aplatissement en fonction de la
profondeur si la planète est un fluide



+ Estimation des corrections
non hydrostatiques
+ Estimation de l'effet du
dôme de Tharsis



Moment d'inertie I

*Modèle à deux couches et encadrement de la taille du
noyau pour les minéralogies raisonnables*

+ atténuation
séculaire de Phobos



Modèle de planète à
deux couches de
rigidité différente
(solide-solide ou
solide liquide)

Marée solide



**Atténuation
moyenne des
parties solides**

Le noyau est a priori liquide

Théorie des figures

- Objectif: calculer la forme des surface isodensité à l'intérieur d'une planète
- Intérêt: permet de calculer les moments d'inerties C et A à partir de f , J_2 Contraintes sur la structure interne à partir de survols de planètes
- Application
 - Mars... jusqu'en 1997 (avec la mesure directe de A et C par mesure de précession)
 - Planètes géantes (J_2 , J_4 , J_6 , ...)

Théorie de Clairaut (1/2)

Supposons une planète en équilibre hydrostatique avec des rayons iso-densité définis par

$$r(s, \theta) = s \left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} e(s) P_n(\cos \theta) \right)$$

où r est le vrai rayon de la couche et s est le « rayon » de la couche dans un système de coordonnées déformés.

Considérons une calotte sphérique d'épaisseur ds et de rayon $\rho(s)$. On a, à l'extérieur de cette calotte un potentiel donné par

$$dU(r) = U(r, a + da) - U(r, a) = da \frac{\partial U}{\partial a}$$

où $U(r, a)$ est le potentiel d'une sphère homogène de forme $r(a, \theta)$ et de densité $\rho(a)$. Ce potentiel s'écrit, pour des points extérieurs

$$U_e(r, a) = -\frac{GM(a)}{r} \left[1 - \left[\sum_{n=2}^{n=\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] \right] = -\frac{4}{3} \pi G \rho(a) \left[\frac{a^3}{r} - \left[\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{3}{2n+1} e \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] \right]$$

en utilisant les définition de J_n et les propriétés des fonctions de Legendre.

À l'intérieur de la calotte sphérique, nous avons la même relation, mais cette fois-ci avec le potentiel

$$U_i(r, a) = \frac{GM(a)}{a} \left[\frac{3}{2} \frac{r^2}{a^2} + \left[\sum_{n=2}^{n=\infty} J_n \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] \right] = \frac{4}{3} \pi G \rho(a) \left[\frac{3}{2} r^2 + \left[\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{3}{2n+1} a^2 e \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] \right]$$

Le potentiel dans la planète, à un rayon r , peut donc s'écrire

$$U(r) = \int_0^r da \frac{\partial U_e}{\partial a} + \int_r^{a_0} da \frac{\partial U_i}{\partial a}$$

et le potentiel de pesanteur (avec l'accélération centrifuge) s'écrit alors

$$\begin{aligned} U(r) &= \int_0^r da \frac{\partial U_e}{\partial a} + \int_r^{a_0} da \frac{\partial U_i}{\partial a} - \frac{1}{2} r^2 \varpi^2 \sin^2 \theta \\ &= \int_0^r da \frac{\partial U_e}{\partial a} + \int_r^{a_0} da \frac{\partial U_i}{\partial a} - \frac{1}{3} r^2 \varpi^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{3} r^2 \varpi^2 P_2(\cos \theta) \end{aligned}$$

Théorie de Clairaut (2/2)

$$U(r) = \text{Constante pour } r(s, \theta) = s \left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} e_n P_n(\cos \theta) \right)$$

Soit, au premier ordre

$$U(s) = -\frac{4}{3} \pi G \left[\frac{1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} e_n P_n(\cos \theta)}{a} \int_0^s 3da \rho a^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3P_n(\cos \theta)}{2n+1} \left[\frac{1}{a^{n+1}} \int_0^s \rho d(e_n a^{n+3}) + a^n \int_a^{a_0} \rho d\left(\frac{e_n}{a^{n-1}}\right) \right] \right]$$

$$-\frac{1}{3} r^2 \varpi^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{3} r^2 \varpi^2 P_2(\cos \theta)$$

d'où, après multiplication par a^{n+1} et différenciation

$$-(s^n \frac{de_n}{dr} + ns^{n-1} e_n) \int_0^s \rho a^2 da + s^{2n} \int_a^{a_0} \rho \frac{d}{da} \left(\frac{e_n}{a^{n-2}} \right) da = -\frac{5\varpi^2 a^4}{8\pi G} \delta_{20}$$

qui peut aussi s'écrire, avec le densité moyenne au rayon s :

$$-(s^n \frac{de_n}{dr} + ns^{n-1} e_n) \frac{s^3 \bar{\rho}}{3} + s^{2n} \int_s^{a_0} \rho \frac{d}{da} \left(\frac{e_n}{a^{n-2}} \right) da = -\frac{5\varpi^2 s^4}{8\pi G} \delta_{20}$$

Cette équation, après simplification, fut trouvée par Clairaut (1743). On montre que tous les

termes $n \neq 2$ sont nuls (au premier ordre). Pour le terme e_2 , un changement de variable $\eta = \frac{s}{e} \frac{de}{ds}$

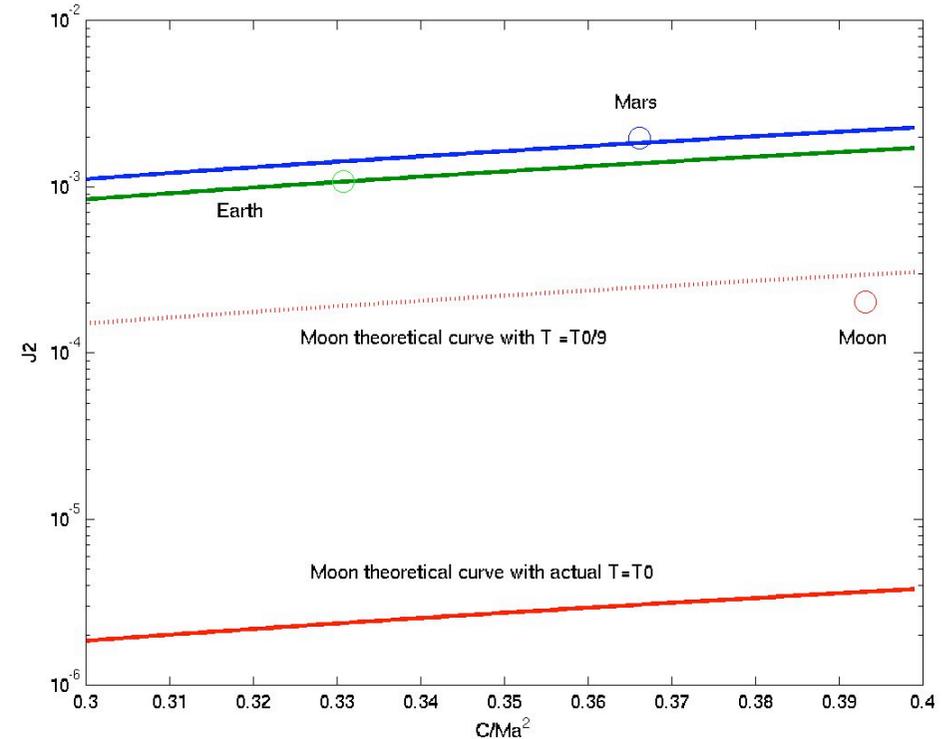
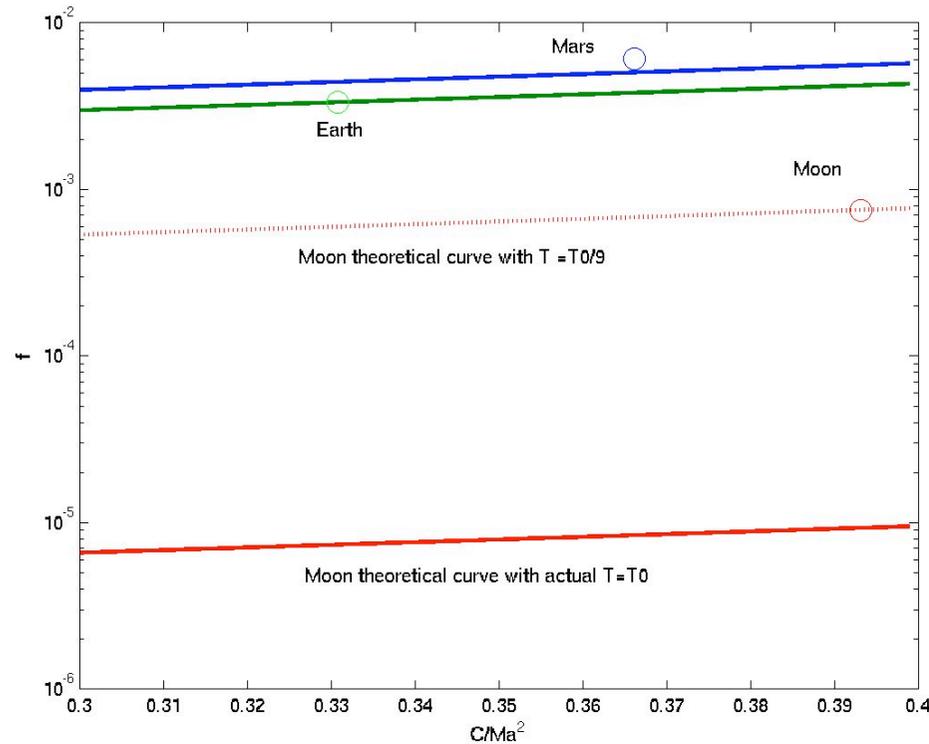
conduit alors à une équation plus simple, dite équation de Radau

$$\frac{d}{ds} \left(\bar{\rho} s^5 (1 + \eta)^{1/2} \right) = 5 \bar{\rho} s^4 \psi(\eta)$$

$$\psi(\eta) = \frac{1 + \frac{1}{2} \eta - \frac{1}{10} \eta^2}{\sqrt{1 + \eta}}$$

Pratiquement, on peut souvent simplifier cette équation en supposant $\psi(\eta) \approx 1$

Application de la Théorie de Clairaut



- Très bon accord pour la Terre....
- Accord moyen pour Mars
- Mauvais accord pour la Lune, sauf si une vitesse de rotation 9 x plus importante est supposée

Comment mesurer A et C? (1/2)

Considérons une planète en rotation autour de son centre de gravité. Cette planète subit un certain nombre de forces extérieures, telles que les forces de gravités des autres astres qui, par l'intermédiaire de la force de marée produiront des variations temporelles du moment cinétique. Ce dernier n'est donc pas isolé, et va varier dans le temps, tant en amplitude qu'en direction. On peut préciser ce problème en écrivant le théorème du moment cinétique dans le repère mobile lié à la planète. Dans ce repère, le moment cinétique vaut

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \int dV \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \\ &= (pA, qB, rC)\end{aligned}$$

où A, B, C sont les moments d'inerties par rapport aux axes x, y, z de la planète, qui valent

$$\begin{aligned}A &= \int dV \rho(y^2 + z^2), \\ B &= \int dV \rho(x^2 + z^2), \\ C &= \int dV \rho(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Comment mesurer A et C? (2/2)

La dérivation du moment cinétique dans le repère mobile conduit alors aux équations On peut alors appliquer le théorème du moment cinétique par rapport au repère tournant, ce qui donne alors

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{J}}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \\ &= (qr(C - B), pr(A - C), pq(B - A))\end{aligned}$$

et on obtient alors finalement les équations qui régissent la rotation d'une planète, dites équations d'Euler

$$\begin{aligned}A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= L \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= M \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= N\end{aligned}$$

Cas elliptique:

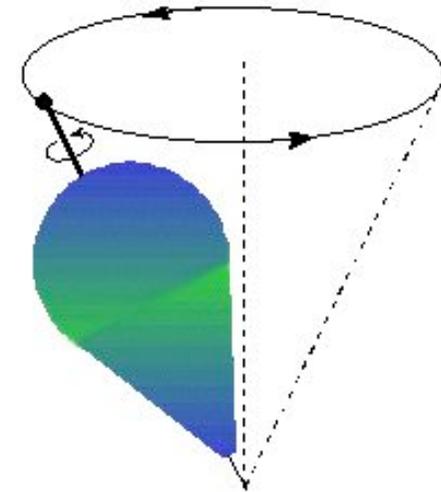
A=B

Paramètre:

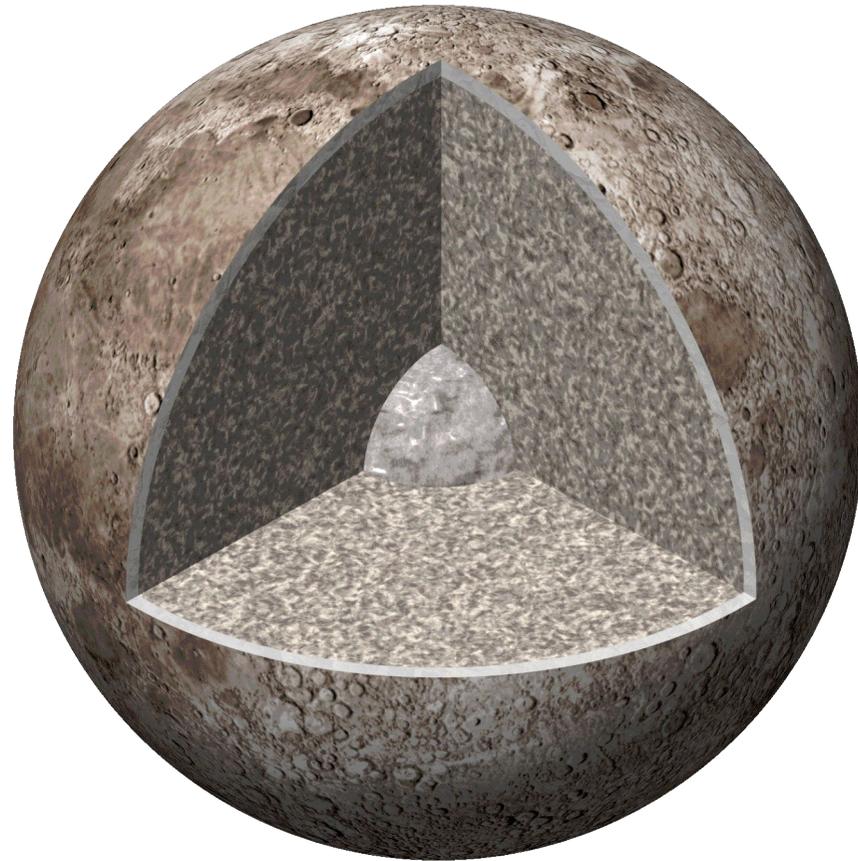
(A-C)/A

Mesurer le moment d'inertie

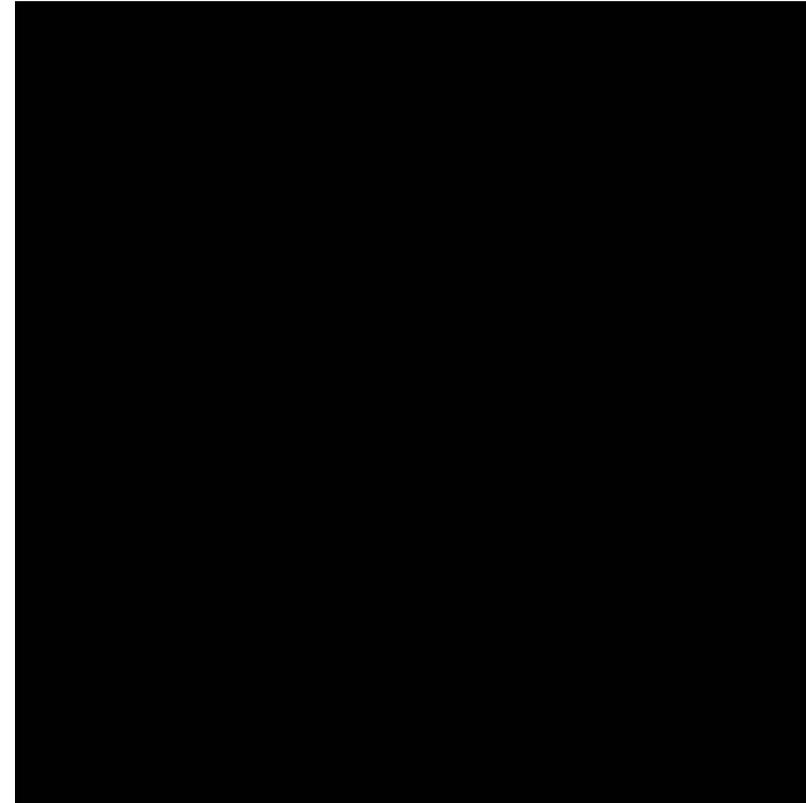
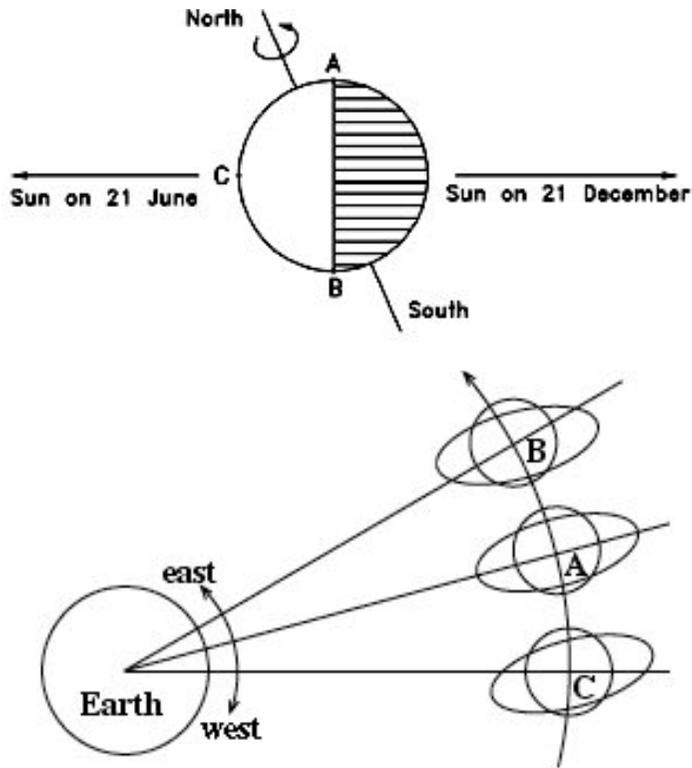
- Etude de la rotation des planètes
- Pour la Terre, première étude faite par Hyparque vers 130 AC
 - Période de précession de 26 000 ans
- La rotation est connue avec précision
 - depuis les missions Apollo pour la Lune
 - Depuis le mission Pathfinder pour Mars
 - Elle reste inconnue pour Mercure et pour Vénus



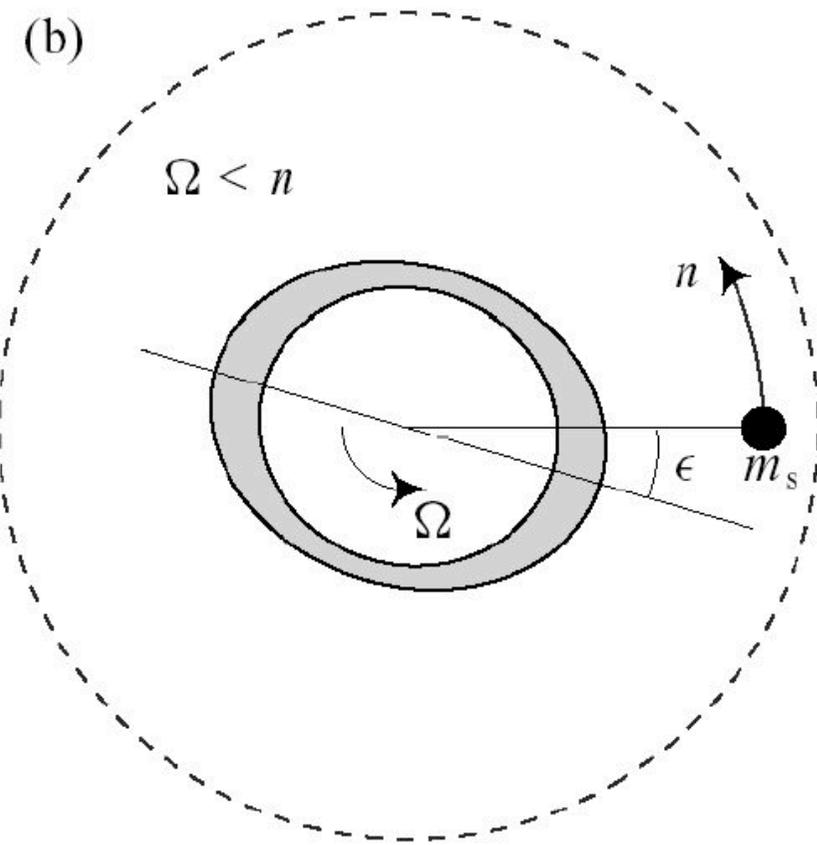
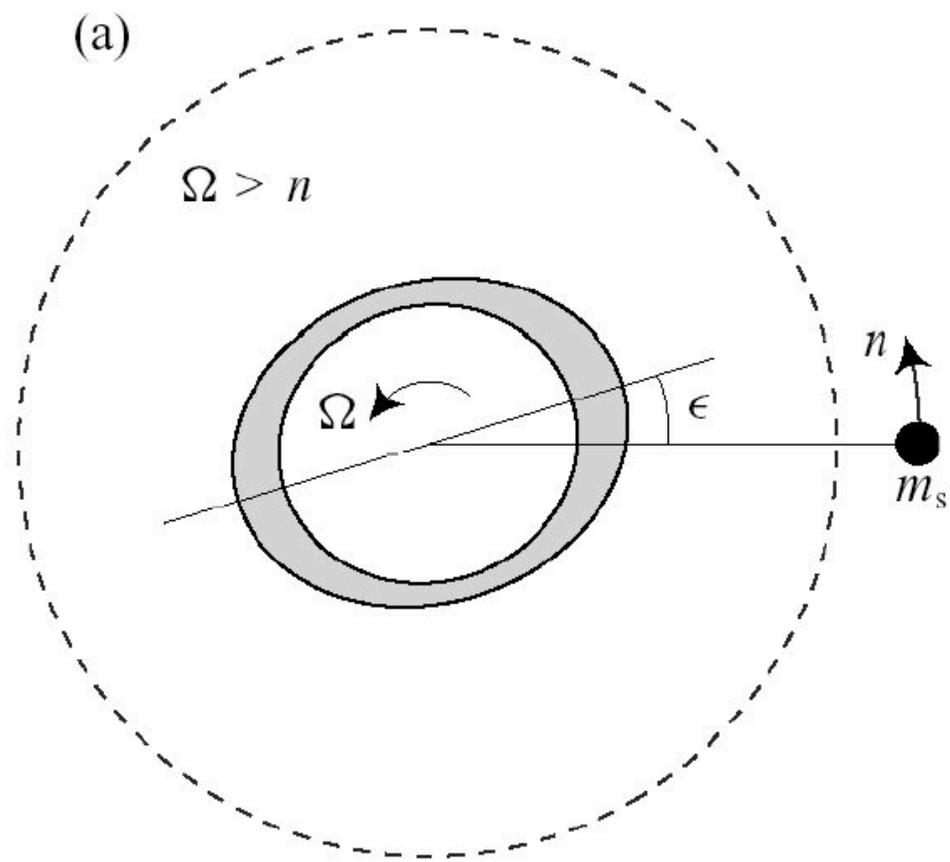
Lune...



Rotation de la Lune et librations



- rotation synchrone
- libration géométrique (associées à l'orientation de l'axe de rotation sur l'ecliptique: $6^{\circ}50'$, effet de rotation/ellipticité: $7^{\circ}54'$, effet de taille finie: 1°)... pas d'information mais 59% de la surface de la Lune visible
- libration physique (pôle-à-pôle, 1.5° , longitudinale: $0.25'$)



les forces de marée sont une des premières manifestations du fait que les planètes ne sont pas ponctuelles, mais de la taille finie. A l'échelle de la planète en effet, les forces d'attraction gravitationnelle ne sont pas homogènes. le centre des planètes seront donc attirés par les autres astres différemment que leur bords, induisant une faible déformation de ces planètes.

Pour exprimer la force de marée, considérons une planète de rayon a , soumise

à l'attraction gravitationnel d'un corps de masse m situé à une distance $R = |\mathbf{r}|$ du centre de la planète. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un point matériel dans le repère lié à la Terre donne

$$m \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{f} + \mathcal{G} m M \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} - m \gamma_{inertie} \quad (20)$$

Les forces d'inerties comprennent les forces liées à la rotation de la Terre (accélération centripète et accélération de Coriolis), mais aussi l'accélération d'entraînement liée à l'attraction de l'astre de masse M sur la Terre. Cette force est donc simplement

$$\gamma_{inertie} = \mathcal{G} M \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \quad (21)$$

On voit qu'il apparaît une force qui fait apparaître la différence d'attraction gravitationnelle entre un point du globe et le centre de la planète. Cette accélération s'écrit alors

$$\mathbf{f}_{Marée} = \mathcal{G} M \left[\frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \right] = -\nabla \phi_{Marée} \quad (22)$$

où $\phi_{Marée}$ est le potentiel de marée. Ce potentiel est donnée par

$$\phi_{Marée} = -\mathcal{G} M \left[\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{R}|^3} \right] \quad (23)$$

Exprimons alors le potentiel de la force d'attraction gravitationnel.

$$V(\mathbf{r}) = -\mathcal{G} \frac{M}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \quad (24)$$

Si la distance R est grande devant r , on peut faire un développement limité du potentiel par rapport aux puissances de $x = r/R$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} &= \frac{1}{R} (1 - 2x \cos \theta + x^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{R} (1 + x \cos \theta \\ &+ x^2 (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}) + x^3 (\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta) + \dots) \end{aligned} \quad (25)$$

Si l'on dérive ce potentiel, on trouve l'expression des accélérations perturbatrices. soit, en posant $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{R}$, et en remarquant que

$$\nabla r \cos \theta = \mathbf{u} \quad (26)$$

$$\nabla r = \mathbf{e}_r \quad (27)$$

$$(28)$$

Rappel: Marée fluide (1/2)

on a finalement

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots \quad (29)$$

avec

$$\gamma_0 = + \frac{\mathcal{G} M}{R^2} \mathbf{u} \quad (30)$$

$$\gamma_1 = + \frac{\mathcal{G} M}{R^3} (3 \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - r \mathbf{e}_r) \quad (31)$$

$$\gamma_2 = + \frac{\mathcal{G} M}{R^4} (\frac{15}{2} \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u} r^2 - 3 r \mathbf{e}_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \quad (32)$$

le premier terme correspond à l'accélération d'attraction exercée au centre de la planète. Cette accélération est celle qui entraîne la planète le long de sa trajectoire. Si on se place dans un repère lié à la planète, elle disparaît, car opposée à l'accélération liée à l'inertie de la planète. Les accélérations supplémentaires sont les accélérations de la marée. Le potentiel de Marée est, si on se limite au premier terme

$$\phi_{Marée} = -\frac{\mathcal{G} M r^2}{R^3} (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}) - \frac{\mathcal{G} M r^3}{R^4} (\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta) \quad (33)$$

Dans la plupart des cas, le potentiel de marée peut être négligé pour ses termes supérieurs. Seul le terme en r^2/R^3 est alors à considérer. En effet, ceci est tout à fait justifié lorsque l'argument x de la série est petit: c'est le cas pour les marées créées par le soleil sur les planètes ($x = 4 \times 10^{-6}$ pour la Terre par exemple. Ce terme est souvent petit pour les marées créées par les satellites sur la planète, mais pas toujours. On a pour la Lune $x = 0.0167$, mais pour la marée de Phobos sur Mars $x = 1/2.76$, $x = 1/13$ pour la marée de Charon sur Pluton. Négliger les termes supérieurs représente alors une erreur de l'ordre du pourcent sur Terre, mais plus importante encore sur Mars. Nous allons maintenant étudier les conséquences de cette force de marée. Pour commencer, considérons une planète fluide et négligeons la compressibilité. Quelle est la forme de la planète, lorsqu'elle est soumise aux forces conjuguées de sa pesanteur et de la force de marée?

Pour répondre à cette question, considérons le potentiel de pesanteur de la planète $W(\mathbf{r})$, à partir duquel dérive la pesanteur par la relation $\mathbf{g} = -\nabla W$. La surface de la planète est une surface d'équilibre et doit donc être une surface équipotentielle de la somme des divers champs de potentiels. On obtient donc

$$W_{total}(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \quad (34)$$

Appelons \mathbf{r}_s la position de la surface en l'absence de marée. Considérons que le potentiel de marée U est petit devant le potentiel de la pesanteur, et que la déformation de la surface par la marée est également faible. En différenciant la

relation (xx) autour de la position d'équilibre nous déduisons que la surface est une équipotentielle lorsque la quantité:

$$-\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}_0(\mathbf{r}_s) + U(\mathbf{r}_s) \quad (35)$$

est constante. La valeur de cette constante peut être calculée en supposant la planète incompressible. La variation de volume totale produite par la marée doit être nulle. Intégrant la relation sur la surface, on déduit alors que cette constante doit être égale à la valeur moyenne du potentiel perturbateur, ce qui donne finalement:

$$\frac{U(\mathbf{r}_s) - \frac{1}{4\pi} \int d\Sigma U(\mathbf{r}_s)}{\mathbf{g}_0(\mathbf{r}_s)} = \delta h \quad (36)$$

où δh représente la hauteur de la déformation perpendiculaire à la surface non déformée de la planète (et donc parallèlement à son champ de pesanteur). En remarquant que la valeur moyenne de la perturbation du potentiel de marée est nulle, on en déduit finalement l'expression de la déformation de la surface de la planète par la force de marée:

$$\delta h = h_0 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \quad (37)$$

where $h_0 = \frac{GM_s^2}{g_0 R^3}$.

Sun/Mercury	Sun/Earth	Sun/Mars	Sun/Jupiter	Moon/Earth	Phobos/Mars
1 m	16 cm	2,6 cm	5,7 cm	36 cm	2,4 mm

Table 1: Amplitude of the tidal amplitude

Ces relations donnent l'amplitude des marées sur divers planètes. Mis à part Mercure, les marées terrestres comptent parmi les plus importantes dans le système solaire, par l'action conjuguée du Soleil et de la Lune. Les relations que nous venons d'obtenir, dans le cas de la Terre, sont également valables pour les marées océaniques. Néanmoins pour ces dernières des phénomènes de résonance peuvent avoir lieu, amplifiant les amplitudes des ondes océaniques.

En fait, il faut en plus considérer dans le cas de la Terre le fait que la Terre est inclinée par rapport au plan de l'écliptique. L'inclinaison est de θ degrés. On doit donc alors écrire le cosinus sous la forme

$$\cos \Theta = \sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \cos(H - \phi) \quad (38)$$

Si on remplace cette expression dans le potentiel, on trouve alors

$$\frac{3 \cos^2 \Theta - 1}{2} = \left(1 - \frac{3 \cos^2 \theta}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{3 \cos^2 \delta}{2}\right)^2 \quad (39)$$

$$+ 3 \cos \theta \sin \theta \cos \delta \sin \delta \cos(H - \phi) \quad (40)$$

$$+ \frac{3}{4} \cos^2 \theta \cos^2 \delta \cos 2(H - \phi) \quad (41)$$

Rappel: Marée fluide (2/2)

Le premier terme s'appelle terme zonal. Il ne dépend pas de la longitude de la lune, mais seulement de l'angle entre le plan équatorial de la Terre et le plan de l'orbite lunaire, c'est à dire la déclinaison de la Lune. Ce terme va varier avec une période deux fois plus faible que la période lunaire, soit environ 13,666 jours (Onde Mf). A cela ce rajoute la variation de la distance Terre-Lune, ce qui fait une période égale à la période lunaire, 27,555 jours (onde Mm). Le second terme fait apparaître un terme en $\cos(H - \phi)$, qui va faire intervenir la période de rotation de la Terre par rapport à la Lune, soit 24h04. Au voisinage de cette onde, on trouvera une série d'ondes de marée provenant des compositions de cette dernière avec les variations plus lentes de déclinaison et d'ellipticité. Cette onde est l'onde diurne. Enfin, on a enfin le troisième terme qui comprend un terme qui varie avec une fréquence deux fois plus grande que la vitesse de rotation angulaire de la Lune, et donc avec une période de 12h25, qui est l'onde semi-diurne...

Marée solide

- Dans le cas d'une planète solide, les marées sont obtenues par la résolution de l'équation de l'élastodynamique...

$$\rho_0 (\partial_t \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \partial_t \mathbf{u}) = 0 = \nabla \cdot (\mathbf{T}_{elastic} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}_0) - \text{div}(\rho_0 \mathbf{u}) \mathbf{g}_0' - \rho_0 \nabla \Phi_{E_t} - \rho_0 \nabla \Phi_{marées} \quad (1)$$

avec pour les pr-contraintes:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_0 + \rho_0 (\mathbf{g}_0 + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')) = 0 \quad (2)$$

pour la redistribution des masses:

$$\nabla^2 \Phi_{E_t} = -4\pi G \text{div}(\rho_0 \mathbf{u}) \quad (3)$$

et pour les contraintes élastiques:

$$\delta \mathbf{T}_{elastic}^{ij}(\mathbf{r}, t) = C^{ijkl} D_k u_l(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

avec dans le cas isotrope

$$C^{ijkl} = (\kappa - \frac{2}{3}\mu) g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \quad (5)$$

Marée solide et ralentissement

Considérons une Terre à symétrie sphérique. Le déplacement de la Terre produit par la marée pour une planète fluide incompressible peut s'écrire sous la forme:

$$u(r) = \frac{\mathcal{G}Mr^2}{gR^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

où θ est l'angle entre le point et la direction de l'astre produisant la marée. Dans une planète non-fluide, ce déplacement s'exprimera sous la forme

$$u(r) = H(r) \frac{\mathcal{G}Mr^2}{gR^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) = -H(r) \frac{\phi_{Maree}}{g}$$

A la surface, la grandeur $H(a) = h$ définit un nombre appelé nombre de Love. On peut également définir d'autres nombres de Love. L'un est relié au potentiel d'attraction gravitationnel de la Terre, qui sous l'effet des marées, se retrouve perturbé et devient:

$$\phi_{grav} = \phi_0 + K(r)\phi_{Maree}$$

Le potentiel à la surface de la Terre devient donc

$$\begin{aligned} \phi_{grav}(a) &= \phi_0(a) + u(a) \frac{d\phi_0}{dr} + K(a)\phi_{Maree} \\ \phi_{grav.}(a) &= \phi_0(a) + (K(a) - H(a))\phi_{Maree} \end{aligned}$$

ou on utilise $\frac{d\phi_0}{dr} = g$. Le potentiel complet à la surface est donc maintenant

$$\phi_{total}(a) = \phi_0(a) + (1 + K(a) - H(a))\phi_{Maree}$$