Master Télédetection – Signaux Géophysiques – Ionosphère – Travaux Dirigés

Raphael Garcia - Université Paris 7

November 9, 2005

1 Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

Dans tout le texte, les variables en gras et l'opérateur ∇ sont des vecteurs. Une onde électromagnétique est une perturbation des champs électriques et magnétiques ($\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$) sous la forme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{x},t) \quad (1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x},t) \quad (2)$$

$\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ est le terme d'équilibre, et $\mathbf{E}_1(\mathbf{x},t)$ est la perturbation par rapport à cet équilibre (ou onde électromagnétique).

Les équations de Maxwell pour le champ électrique peuvent s'écrire:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla.\mathbf{E}) = \mu_0\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (3)$$

avec $\mathbf{E}$ le champ électrique, $\mathbf{J}$ la densité de courant, μ_0 et ϵ_0 les constantes électromagnétiques du vide.

1) Réécrire léquation (3) pour les champs $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{J}_0$ à l'équilibre.

2) Réécrire l'équation (3) pour les champs $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ et $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$. En utilisant les résultats de la question 1), en déduire une équation reliant $\mathbf{E}_1(\mathbf{x},t)$ et $\mathbf{J}_1(\mathbf{x},t)$.

3) On suppose maintenant que les champs d'ondes considérées sont des ondes planes de vecteur d'onde $\mathbf{K}$ et de pulsation ω. Elles s'écrivent donc sous la forme:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_{10}e^{i(\mathbf{K}.\mathbf{x}-\omega t)} \quad (4)$$

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{x},t) = \mathbf{J}_{10}e^{i(\mathbf{K}.\mathbf{x}-\omega t)} \quad (5)$$

$$\mathbf{Ue}_1(\mathbf{x},t) = \mathbf{Ue}_{10}e^{i(\mathbf{K}.\mathbf{x}-\omega t)} \quad (6)$$

où $\mathbf{Ue}_1$ est la perturbation de la vitesse des électrons dans le plasma.
Montrez que:

- $\frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial t} = -i\omega \mathbf{J}_1$
- $\nabla.\mathbf{E}_1 = \mathbf{K}.\mathbf{E}_1$
- $\nabla^2 \mathbf{E}_1 = (\mathbf{K}.\mathbf{K})\mathbf{E}_1 = K^2 \mathbf{E}_1$

4) On suppose que le champ électrique de l'onde électromagnétique est polarisé transversalement: $\mathbf{K}.\mathbf{E}_1 = 0$. En utilisant l'équation obtenue à la question 2) et les relations de la question 3), en déduire que:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - K^2\right) \mathbf{E}_1 = -i\omega\mu_0 \mathbf{J}_1 \tag{7}$$

avec $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ vitesse de la lumière dans le vide.

5) Si l'on suppose que le plasma est électriquement neutre (densité d'électrons = densité d'ions partout), stationnaire ($\mathbf{Ue}_0 = \mathbf{Ue}_0 = \mathbf{0}$), froid (Température des ions et des électrons nulle) et uniforme, alors on peux montrer, à partir des equations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement des électrons, que:

$$\mathbf{J}_1 = -n_{e0} e \mathbf{Ue}_1 \tag{8}$$

$$i\omega \mathbf{Ue}_1 - \frac{e}{m_e}\mathbf{E}_1 = 0 \tag{9}$$

avec n_{e0} la densité délectrons à l'équilibre, e la charge de l'électron, $\mathbf{Ue}_1$ la perturbation de la vitesse des électron due au passage de l'onde électromagnétique, et m_e la masse des électrons. En utilisant les deux équations ci-dessus et l'équation de la question 4), en déduire la relation vérifiée par le champ d'onde $\mathbf{E}_1$. Quelle est la condition sur K et ω pour que cette équation soit vérifiée? Cette relation entre K et ω est la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans un plasma. On posera ${\omega_p}^2 = \sqrt{\frac{n_{e0}e^2}{\epsilon_0 m_e}}$, avec ω_p la fréquence de plasma.

2 Vitesse de phase et vitesse de groupe des signaux GPS

Les satellites émettent des ondes électromagnétiques qui se propagent vers la Terre. Cette dernière est entourée, entre les altitudes 90 et 500 km par des particules ionisées qui constituent l'ionosphère: cette dernière est constituée essentiellement de n_{e0} protons par unité de volume, de charge +e et de masse m_i, et de n_{e0} électrons par unité de volume, de masse m_e et de charge -e. On suppose l'ionosphère homogène (densité d'électron constante dans l'ionosphère).

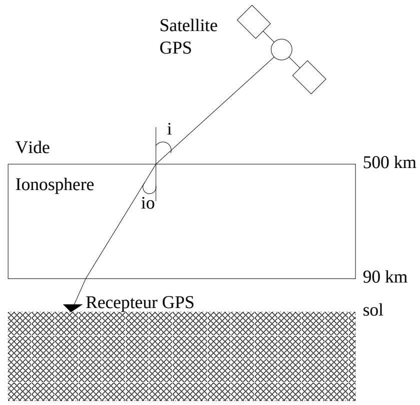

Figure 1: Géométrie du problème

Une onde électromagnétique plane et polarisée rectilignement se propage dans le milieu.
Le champ électromagnétique de cette onde s'crit alors:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_{10} \exp i(\mathbf{K}.\mathbf{x} - \omega t) \tag{10}$$

avec $\mathbf{E}_1$ le vecteur champ électrique, $\mathbf{K} = K\mathbf{e_x}$ le vecteur d'onde, $\mathbf{x}$ le vecteur position et ω la pulsation. Cette onde interagit essentiellement avec les électrons de l'ionosphère car elle les met en mouvement sous l'effet du champ électrique (les protons plus lourds sont plus difficiles à déplacer). Lorsque l'on écrit les équations du mouvement des électrons sous l'effet de l'onde, on obtient une relation qui doit etre vérifiée par ω et K:

$$K = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{11}$$

avec c la vitesse de la lumière dans le vide et $\omega_p^2 = \frac{n_{e0}e^2}{m_e\epsilon_0}$ la fréquence de plasma pour laquelle $n_{e0} = 10^{12}e/m^3$ est la densité d'électrons, $e = 1.6 * 10^{-19}C$ est la charge d'un électron, $m = 0.91*10^{-30}kg$ est la masse d'un électron et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ est la permittivité du vide.

1) Réécrire l'équation (10) en prenant K complexe sous la forme K=Re+iIm. Décrire ce qui se passe si Im<0 et si Im>0.
En déduire une condition sur la partie imaginaire de k pour l'onde se propage à amplitude constante.

2) Sachant que ω est un nombre réel, quelle est la condition sur la pulsation pour que l'onde se propage à amplitude constante (sans atténuation ni amplification)?

3) Calculez la vitesse de phase $V_\phi = \frac{\omega}{K}$ et la vitesse de groupe $V_g = \frac{d\omega}{dK}$ lors de la propagation de cette onde électromagnétique dans le plasma.

4) L'indice de réfraction (n) de l'atmosphère dépend de l'observable que l'on regarde. Pour la phase des signaux, il est défini comme le rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide et vitesse de phase: $n_\phi = \frac{c}{V_\phi}$. Pour l'énergie ou la modulation en amplitude des signaux, il est défini comme le rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide et vitesse de groupe: $n_g = \frac{c}{V_g}$.
Calculez l'indice de réfraction de l'ionosphère pour la phase et pour l'énergie du signal.

5) On considère la propagation d'une onde électromagnétique d'un satellite vers le sol. Quelle doit être la fréquence minimum du signal électromagnétique pour que celui-ci traverse l'ionosphère?

6) Les ondes (phase et amplitude) suivent le trajet fixé par la vitesse de groupe. Connaissant la loi de Snell-Descartes qui impose que le produit $n_g \sin(i)$ est conservé au cours de la propagation d'une onde électromagnétique (avec i l'angle d'incidence de l'onde), on considère la propagation d'une onde électromagnétique d'un satellite vers le sol à l'interface entre le vide et la ionosphère à 500 km d'altitude.
Ecrire la loi de Snell-Descartes à l'interface entre le vide et l'ionosphère.
On suppose que le signal arrive à l'interface avec une inclinaison $i = 80°$. Quelle est la déviation angulaire (i-io) du signal satellitaire pour une fréquence radio de 30MHz et pour une fréquence GPS de 1.2GHz.
L'effet de l'ionosphère sur le trajet des ondes émises par les satellites GPS peut-il etre négligé?

7) Le système GPS émet des signaux à 2 fréquences f1 et f2 proches de 1.2GHz.
Calculez les avances de phase $\Delta t1$ et $\Delta t2$ (avance de la phase de l'onde par rapport à une propagation dans le vide), pour les deux fréquences f1 et f2, et provoqués par la présence de l'ionosphère, sur un signal se propageant à la verticale (i=0).
Montrez que l'on peux calculer l'intégrale de la densité d'électron dans l'ionsophère $I = \int_{rai} n_{e0} dx$ à partir de la mesure de $\Delta t1$ et $\Delta t2$ (pour un rai vertical dans ce modèle d'ionosphère uniforme, on a $I = H * n_{e0}$). Pour cela, on approximera la vitesse de phase au premier ordre par : $V_\phi \approx \frac{c}{1-\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}}$ car $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} << 1$.