Licence STEP L2 Module Physique pour les géosciences S4

Mécanique des solides et des planètes

MS4: Exercices du 19 février 2007

2007MS4E1 :

Soit ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même. On a $\omega=2\pi/T$ avec T=86 164 s (jour sidéral), soit $\omega=7.3\times10^{-5}$ s^{-1}. Soit I_T le moment d'inertie de la Terre autour de son axe de rotation propre. Si on assimile la Terre à une sphère homogène (ce qu'on sait ne pas être tout à fait exact, mais nous ferons plus tard un calcul plus précis), son moment d'inertie est $I_T=2/5M_TR_T^2$ où M_T est sa masse et R_T son rayon. Soit $I_T=9.8\times10^{37}$ kg·m^2 avec $M_T=6\times10^{24}$ kg et R_T=6400 km. Le moment cinétique σ_T de rotation de la Terre sur elle-même est alors $\sigma_T=I_T\omega$=7×10^{33} kg·m^2· s^{-1}.

Soit σ_L le moment cinétique de rotation de la Lune, qu'on assimilera à un point, autour de la Terre. Il est donné par $\sigma_L=M_Ld_{TL}{}^2\omega_L$, où M_L est la masse de la Lune, d_{TL} la distance Terre-Lune et ω_L la vitesse angulaire de rotation de la Lune autour de la Terre. On a $\omega_L=2\pi/T_L$ avec T_L=27.3 jours, soit $\omega_L=2.7\times10^{-6}$ s^{-1}. Avec $M_L=7.4\times10^{22}$ kg ($\cong M_T/81$) et $d_{TL}=3.8\times10^8$ m, on obtient alors σ_L=2.9×10^{34} kg·m^2· s^{-1}. On constate que le moment cinétique de révolution de la Lune autour de la Terre est plus grand que le moment cinétique de rotation de la Terre sur elle-même mais que les valeurs des deux quantités sont assez voisines.

2007MS4E2 :

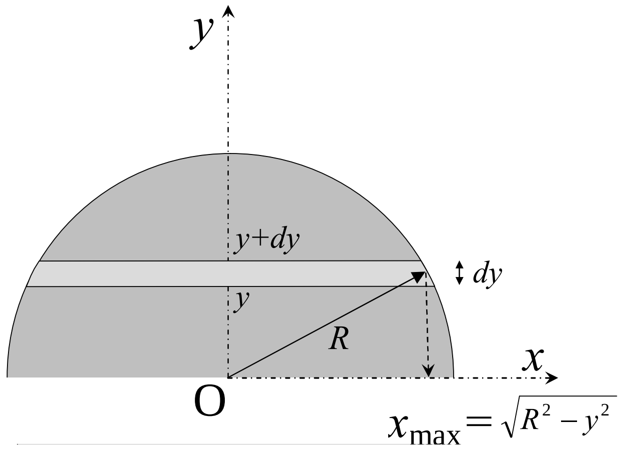
L'énergie cinétique E_K d'un objet tournant autour d'un axe fixe est égale à $E_K=1/2I\omega^2$, où I est le moment d'inertie autour de cet axe et ω la vitesse angulaire de rotation. Si on assimile le volant à un cerceau, on a $I=MR^2$ où M est sa masse et R son rayon, soit I=4 kg·m^2. On a donc $E_K=1/2\times4\times(2\pi\times600/60)^2=8\times100\times\pi^2=$8000 kg·m^2· s^{-1}.

2007MS4E3 :

Par symétrie, le centre d'inertie du demi-disque est sur l'axe Oy de son plan perpendiculaire à sa base et passant par son milieu. La position y_G du centre d'inertie sur cet axe vérifie $y_G=\frac{1}{M}\int ydm$ où M est la masse du disque. Comme il est homogène, sa masse volumique est $\rho=M/(e\pi R^2/2)=2M/e\pi R^2$, e étant son épaisseur et R son rayon. Découpons notre disque en petites tranches, ayant l'épaisseur e du disque, comprises entre y et $y+dy$ (voir figure). Chaque tranche possède une masse dm donnée par $dm=\rho\times e\times 2x_{\max}\times dy$ où $x_{\max}=\sqrt{R^2-y^2}$. On a alors :

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M}\int_0^R ydm = \frac{1}{M}\int_0^R \rho e 2y\sqrt{R^2-y^2}dy = \frac{1}{M}\frac{2M}{e\pi R^2}2e\int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}dy = \\ &= \frac{4}{\pi R^2}\left[-\frac{1}{3}\left(R^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R \end{aligned} \quad . \qquad (1)$$

soit $y_G=\boxed{\frac{4}{3\pi}}R$.



2007MS4E4 :

Par symétrie, le centre d'inertie du cône homogène est sur l'axe Oz de symétrie de révolution. Sa position z_G sur cet axe vérifie $z_G = \frac{1}{M}\int z dm$ où M est la masse du cône. Comme il est homogène, sa masse volumique est $\rho = M/(\pi R^2 h/3) = 3M/\pi R^2 h$, h étant sa hauteur et R le rayon de sa base. Découpons notre cône en petites tranches comprises entre z et $z+dz$ (voir figure). Chaque tranche possède un rayon $r(z)=R(h-z)/h$ et une masse dm donnée par $dm=\rho\times\pi r(z)^2 dz$. On a donc:

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{M}\int_0^h z dm = \frac{1}{M}\int_0^h z\rho\pi\left(R\frac{h-z}{h}\right)^2 dz = \frac{1}{M}\frac{3M}{\pi R^2 h}\pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z(h-z)^2 dz = \\ &= \frac{3}{h^3}\int_0^h \left[zh^2 - 2hz^2 + z^3\right]dz = \frac{3}{h^3}\left[\frac{h^2}{2}h^2 - 2h\frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4}\right] = 3h\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) \end{aligned} . \qquad (5)$$

soit $z_G = \frac{h}{4}$. On connaît le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz de chaque petit disque élémentaire, c'est $½dmr(z)^2$. Pour obtenir le moment d'inertie I_{zz} de tout le cône par rapport à l'axe Oz, il suffit de sommer toutes ces petites contributions:

$$I_{zz} = \int r^2 dm = \int_0^h \frac{1}{2}\rho\pi\left(R\frac{h-z}{h}\right)^4 dz = \frac{1}{2}\frac{3M}{\pi R^2 h}\pi\frac{R^4}{h^4}\int_0^h (h-z)^4 dz = \frac{3}{10}MR^2 . \qquad (7)$$