L2 - Physique pour les sciences de l'univers
Correction du TD N°3

Vendredi 23 février 2007

Exercice 1 : Force gravitationnelle Vs. Force de Coulomb

1) *On se donne :*

Masse de l'électron : $9.109\,10^{-31}\ kg$
Masse du proton : $1.672\,10^{-27}\ kg$
Masse de la Terre : $5.974\,10^{24}\ kg$
Rayon de la Terre : $6371\ km$
Constante gravitationnelle de Newton :
$G = 6.674\,10^{-11}\ m^3/kg\ s^2$

Charge de l'électron : $-1.602\,10^{-19}\ C$
Charge du proton : $1.602\,10^{-19}\ C$
Rayon de l'atome d'hydrogène : $5\,10^{-11}\ m$
Constante de Coulomb :
$\kappa = 1/4\pi\epsilon_0 = 8.987\,10^9\ N/F$

- la force gravitationnelle entre la Terre et un proton ou un électron, en S.I. :

$$P = \frac{GM_T m_p}{R_T{}^2} \ \ ou\ \ \frac{GM_T m_e}{R_T{}^2} \simeq 10^{-26}\ \ ou\ \ 10^{-30} N$$

- la force gravitationnelle entre un proton et un électron, où d est la distance entre l'électron et le proton dans le cas d'un atome d'hydrogène (cas d'interaction proton-électron le plus simple) :

$$F_g = \frac{Gm_e m_p}{d_{e-p}{}^2} \simeq 10^{-47}\ N$$

- la force de Coulomb entre un proton et un électron :

$$F_e = \frac{\kappa q_e q_p}{d_{e-p}{}^2} \simeq 10^{-7}\ N$$

En conclusion, quand on regarde des interactions simples entre des charges, seule la force de Coulomb compte.

2) *Un objet de masse* $1.5\ 10^{-3}\ kg$ *possède une charge positive de* $24\mu C$*. Il est placé dans un champ électrique vertical dirigé vers le haut, d'intensité 610 N/C. Que peut-il se passer ?*

Les 2 forces que subit l'objet (poids et force électrostatique) sont de direction verticale, de sens opposés et d'intensités égales : $P = mg \simeq 1.4\,10^{-2}$ N vers le bas, et $F_e = qE \simeq 1.4\,10^{-2}$ N, q positif et E dirigé vers le haut (les valeurs sont données en S.I.). L'objet peut donc rester immobile si on le lâche très doucement. . .

Exercice 2 : Potentiel électrique en 1-D

1) *On place une charge* $q_1 = 15\mu C$ *à l'origine d'un axe* (Ox) *: déterminer et tracer le potentiel en fonction de* x*.*

$$V_1 = \kappa q_1/|x|$$

Dessin : voir figure 1

2) *On place une deuxième charge* $q_2 = 6\mu C$ *en* $x_0 = 2$ *m. Déterminer et tracer le potentiel engendré par ces 2 charges.*

$$V_2 = \kappa q_2/|x - x_0| \;\; et \;\; V_{total} = V_1 + V_2$$

Dessin : voir figure 1 pour V_2, et figure 2 pour V_{total}.

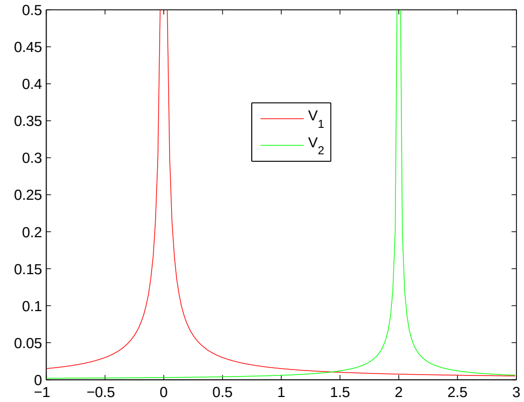

FIG. 1 – $4\pi\varepsilon_0 V_1(x)$ et $4\pi\varepsilon_0 V_2(x)$.

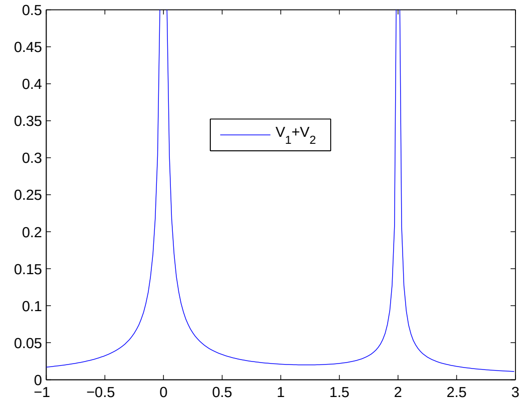

FIG. 2 – $4\pi\varepsilon_0 (V_1(x) + V_2(x))$.

3) *On ajoute enfin une charge négative* $q_3 = -4\mu C$ *en* x*.*

La force qui s'exerce sur la troisième charge est la somme des 2 forces engendrées par les 2 premières charges : $F(x) = F_1 + F_2$ et $F_1 = -V_1'(x)$, $F_2 = -V_2'(x)$ donc $F(x) = \dfrac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1 x}{|x|^3} + \dfrac{q_2(x - x_0)}{|x - x_0|^3}\right)$.

Attention au signe de F ! Si q_3 est à une position $x < 0$ la charge est à gauche des 2 autres, donc les forces sont orientées dans le même sens, vers les x croissants (signe positif). Si q_3 est à une position $x > x_0$ la charge est à droite des 2 autres, donc les forces sont orientées dans le même sens, vers les x décroissants (signe négatif). Si q_3 est à une position $0 < x < x_0$ la charge est entre les 2 autres, donc F_1 est de signe négatif, F_2 de signe positif, cf. figure 4.

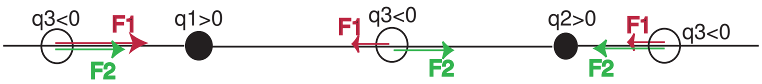

FIG. 3 – Force exercée sur q_3 par les 2 autres charges : F_1et F_2 .

C'est donc seulement dans le cas où $0 < x < x_0$ que l'on peut espérer avoir une force résultante nulle : on écrit

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) = \frac{\kappa\, q_3\, q_1}{x^2} - \frac{\kappa\, q_3\, q_2}{(x - x_0)^2}.$$

On résout l'équation $F(x) = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{q_1}{x^2} = \dfrac{q_2}{(x - x_0)^2}$.

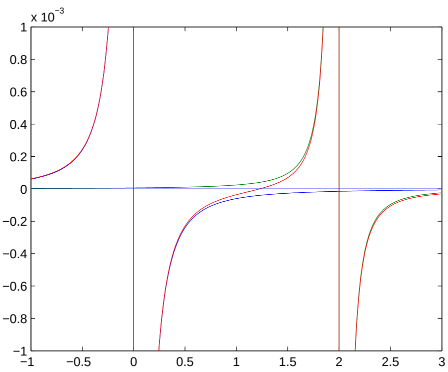

FIG. 4 – Force exercée sur q_3 par les 2 autres charges : $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$.

Soit on obtient une équation du second degré, que l'on peut résoudre par la méthode du discriminant, puis il faut éliminer la solution qui n'est pas dans l'intervalle $[0, x_0]$; soit on peut écrire que deux nombres sont égaux si les racines sont égales ou opposées. Ici on connait leurs signes donc :
$\sqrt{\dfrac{q_1}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{q_2}{(x-x_0)^2}}$ implique $\dfrac{\sqrt{q_1}}{x} = \dfrac{\sqrt{q_2}}{(x_0 - x)}$ et on trouve $x = \dfrac{x_0}{\sqrt{q_2/q_1}+1}$ (A.N. : $x \simeq 1.2$ m).

Exercice 3 : Champ électrique en 2-D

Deux charges q1 et q2 sont placées à une distance 2a l'une de l'autre. On regarde un point situé sur l'axe orthogonal qui passe au milieu de ces 2 charges, à une hauteur y (voir figure). On veut calculer le champ électrique en ce point :

1) Formellement pour $q_1 = q_2$, puis $q_1 = -q_2$, et on cherchera une formule simplifiée pour le cas $y \gg a$.

2) Numériquement, si $a = 30$ cm, $y = 40$ cm et $q_1 = 2\mu C$.

1) Si $q_1 = q_2$: le champ électrique résultant est alors sur l'axe vertical (vers le haut comme sur le dessin si les 2 charges sont positives, dans l'autre sens si les 2 charges sont négatives) car les 2 composantes horizontales s'annulent. Sa valeur est la somme des 2 composantes verticales des 2 champs.

$E = \sin\theta \dfrac{\kappa q_1}{a^2 + y^2}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$. Finalement on a donc $E = \dfrac{2\,\kappa q_1\, y}{(a^2+y^2)^{3/2}}$.

Si $q_1 = -q_2$: le champ électrique résultant est alors sur l'axe horizontal (vers la droite si $q_1 > 0$ et $q_2 < 0$ comme sur le dessin, dans l'autre sens si c'est l'opposé) car les 2 composantes verticales s'annulent. Sa valeur est la somme des 2 composantes horizontales des 2 champs.

$E = \cos\theta \dfrac{\kappa q_1}{a^2 + y^2}$ et $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$.

Finalement on a donc $E = \dfrac{2\,\kappa q_1\, a}{(a^2+y^2)^{3/2}}$. Pour le sens (droite ou gauche) : cela dépend donc des signes respectifs de q_1 et q_2, voir dessin.

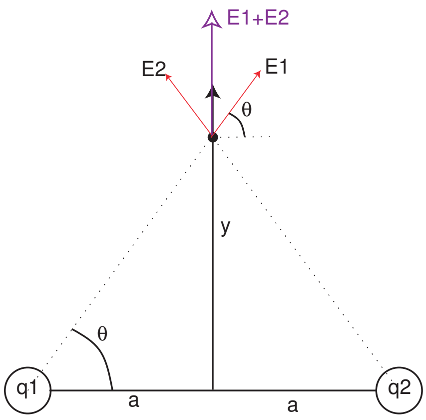

Fig. 5 – Cas $q_1 = q_2 > 0$

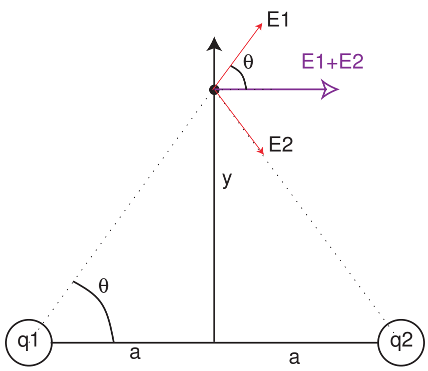

Fig. 6 – Cas $q_1 = -q_2$; $q_1 > 0$

Enfin si $y \gg a$, l'expression $(a^2+y^2)^{3/2}$ se simplifie en y^3.

Dans le premier cas, on voit un champ "radial" qui vaut $E = \dfrac{2\,\kappa q_1}{y^2}$, comme le champ engendré par une unique charge ponctuelle de $2q_1$.

Dans le second cas, le champ est parallèle à l'axe horizontal et vaut $E = \dfrac{\kappa 2 a q_1}{y^3}$. (Reconnaissez-vous là une formule de dipôle ?)