



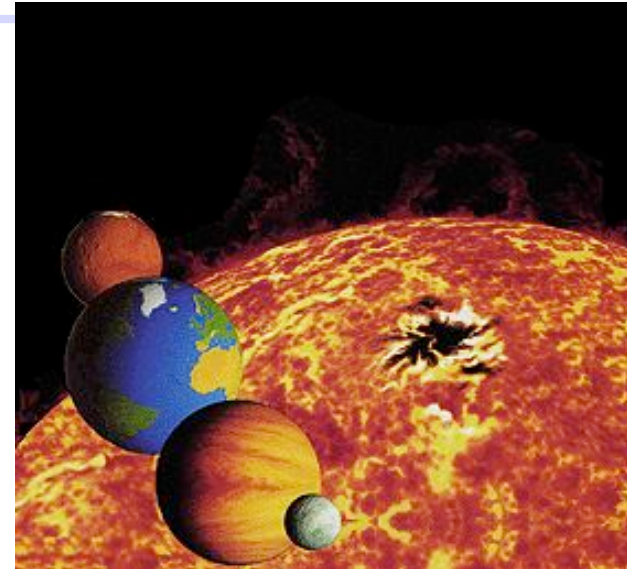
# Planétologie Comparée

Philippe Lognonné  
[Lognonne@ipgp.jussieu.fr](mailto:Lognonne@ipgp.jussieu.fr)

Département de Géophysique Spatiale et Planétaire  
Institut de Physique du Globe de Paris

# Planètes telluriques

- Mercure, Venus, Terre, Mars
  - Toutes à moins de 2 UA du soleil
  - Terre et Venus  $\sim 90\%$  de la masse



	Planètes telluriques				Planètes géantes				
	Mercure	Venus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
Période de rotation [d <sup>a</sup> ]	58.65	243.0 <sup>b</sup>	0.9973	1.026	0.4135	0.4440	0.7183 <sup>b</sup>	0.6713	6.387 <sup>b</sup>
Inclinaison sur orbite[°]	0.5	177.4	23.45	25.19	3.12	26.73	97.86	29.56	122.5
Distance Orbitale [UA <sup>c</sup> ]	0.3871	0.7233	1.000	1.524	5.203	9.572	19.19	30.07	39.54
Période orbitale [a <sup>d</sup> ]	0.2410	0.6156	1.001	1.882	11.87	29.39	84.16	165.0	248.8
Masse [10 <sup>24</sup> kg]	0.3302	4.869	5.974	0.6419	1899.	568.46	86.63	102.4	0.0131

# Quelques livres et ouvrages

---

- Planetary Sciences, I de Pater, J.L.Lissauer, Cambridge, University press, 2001
- Solar System Evolution, a new perspective, Cambridge, University press, 2001
- Le système solaire, InterEditions/Editions CNRS, T.Encrenaz, J.P.Bibring, M.Blanc, 1987
- Mars: histoire d'un autre Monde, F.Forget, F.Costard, P.Lognonné, Editions Belin, 2003

# Information géophysique: structure Interne

	Mercure	Venus	Terre	Mars	Lune	Ganymede	Io
Rayon	0,38	0,95	1	0,54	0,27	0,41	0,28
Masse	0,055	0,815	1	0,107	0,012	0,018	0,015
Masse volumique	5430	5250	5515	3940	3340	1940	3554
Masse volumique non comprimée	5300	4000	4100	3800	~3300	1800	~3500
Moment d'Inertie	0,34	?	0,3355	0,3662	0,3905	0,3105	0,378
Rayon Noyau	0,8	0,55	0,546	0,5	0,25	0,30	0,50
Sismologie	NON	NON	OUI	NON	OUI	NON	NON

# Information géochimique: structure interne

Génésis (NASA): Vent solaire  
Lancement : 8 août 2001  
Retour : Septembre 2004  
< xx mg

Stardust : Grains cométaires  
Lancement : 7 Février 1999  
Retour : Janvier 2006  
< xx mg

Mars  
Lancement: > 2013  
Retour: 3 ans après  
0,5-2 Kg ?

Muses-C (ISAS) : Astéroïde 1998 SF36  
Lancement : Novembre/décembre 2002  
Retour : Juin 2007  
< xx mg

Apollo (NASA) et Luna (USRR) : Lune  
Apollo 11 16-24 Juillet 1969, 20 Kg,  
Apollo 12 14-24 Novembre 1969, 34 Kg  
Luna 16 12-24 septembre 1970, 101 g  
Apollo 14 31 Janvier- 9 Février 1971, 42 Kg  
Apollo 15 26 Juillet-7 août 1971, 66 Kg  
Luna 20 14 février- 25 février 1972, 30 g  
Apollo 16 16-27 Avril 1972, 96 Kg  
Apollo 17 7-19 Décembre 1972, 110 Kg  
Luna 24 9 août-22 août 1976, 170g



- Mais aussi des échantillons venus naturellement sur Terre
  - Météorites Lunaires
  - Météorites Martiennes (SNC)
  - Météorites de Cères (Eucrites)

# Contraintes cosmogéochimiques sur le noyau

	1	2	3	4	5	6	7
<b>Manteau + croûte</b>							
<b>Mg/(Mg+Fe)</b>	<b>0,79</b>	<b>0,77</b>	<b>0,67</b>	<b>0,77</b>	<b>0,66</b>	<b>0,75</b>	<b>0,72</b>
<b>Masse relative</b>	<b>73,6</b>	<b>74,3</b>	<b>88,1</b>	<b>81</b>	<b>81,8</b>	<b>78,3</b>	<b>80,8</b>
<b>Noyau</b>							
<b>Fe</b>	<b>76,2</b>	<b>60,4</b>	<b>72</b>	<b>88,1</b>	<b>63,7</b>	<b>77,8</b>	<b>88,1</b>
<b>Ni</b>	<b>6,2</b>	<b>5,8</b>	<b>9,3</b>	<b>8</b>	<b>8,2</b>	<b>8</b>	<b>11,1</b>
<b>Co</b>	-	-	-	<b>0,4</b>	-	-	<b>0,3</b>
<b>Cu</b>	-	-	-	-	-	-	<b>0,1</b>
<b>S</b>	<b>17,6</b>	<b>33,8</b>	<b>18,6</b>	<b>3,5</b>	<b>9,3</b>	<b>14,2</b>	<b>0,4</b>
<b>O</b>	-	-	-	-	<b>18,7</b>	-	-
<b>Masse relative (%)</b>	<b>26,4</b>	<b>25,7</b>	<b>11,9</b>	<b>19,0</b>	<b>18,2</b>	<b>21,7</b>	<b>19,2</b>

- 1: Formation à partir d'une nébuleuse de composition solaire en équilibre adiabatique pression-température (Goettel, 1983)
- 2: Formation à partir d'une nébuleuse avec zones d'accrétion modifiées (Weidenschilling, 1972)
- 3: Mélange de chondrites contraint par la densité moyenne et le moment d'inertie hydrostatique (Anderson, 1972)
- 4: Mélange de chondrites contraint par la minéralogie de surface mesurée par Viking et Mars 5 (Morgan et Anders, 1979)
- 5: 30% de chondrite C1/Orgueil et 70% mélange chondritique hautes températures (Ringwood, 1981)
- 6: FeO (Manteau) et Fe noyau contraint par les météorites SNC (manteau) et bilan global de Fer (Wänke et Dreibus, 1988)
- 7: Fer et S contraint par la teneur en Co et Cu du manteau martien (estimé grâce aux SNC), (Gaetani et Grove, 1997)

# Les premières mesures astronomiques

---

- Mars a deux satellites: Phobos et Deimos
  - La mesure des périodes et demi-grand axes donne la masse de Mars avec lois de Kepler
    - 0.16% (Hall, 1878),  $3 \cdot 10^{-4}$  % (Mariner 4, 1965),  $< 10^{-4}$  % (Mariner 9-Viking, 1976)
  - La planète est elliptique: faible perturbation de la trajectoire de Phobos: paramètre  $J_2$
  - La planète ne se déforme pas immédiatement avec la marée de Phobos: viscosité de la planète et coefficient de qualité associé
- Paramètres géophysiques:
  - Densité moyenne :  $3933.5 \text{ kg/m}^3$
  - Rayon moyen et aplatissement:  $3389.92 \text{ km}$  ,  $1/160$
  - $J_2$  et décalage entre centre de masse et de figure:  $1,96 \cdot 10^{-3}$  ;  $2.5 \text{ km}$
  - Coefficient d'atténuation moyenne : 50-150

# Champ de gravité d'une planète

Dans le cas général, le potentiel d'attraction d'une planète en un point  $\mathbf{r}$  à l'extérieur de la planète

$$U(r) = -G \iiint_D \frac{\rho dV}{D}$$

où  $D$  est la distance entre une particule de la planète et le point courant. En utilisant

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{n=\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \chi) \right]$$

où  $\chi$  est l'angle entre le rayon  $\mathbf{r}$  et rayon d'un point courant de l'intérieur de la planète. En utilisant

$$P_n(\cos \chi) = P_n(\cos \theta_1) P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^{m=n} P_n^m(\cos \theta_1) P_n^m(\cos \theta) \cos[m(\phi_1 - \phi)]$$

on obtient

$$U(r) = -\frac{GM}{r} \left[ 1 - \left[ \sum_{n=2}^{n=\infty} J_n \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] + \sum_{n=2}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n^m(\cos \theta) (C_{nm} \cos m\phi + S_{nm} \sin m\phi) \right]$$

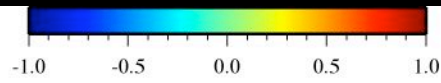
avec

$$J_n = \frac{1}{M} \iiint dV \rho \left( \frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta)$$

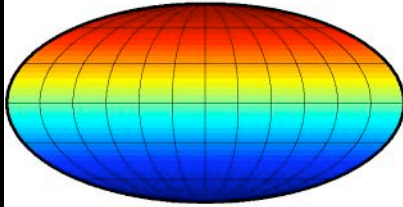
$$C_{nm} = \frac{1}{M} \iiint dV \rho \left( \frac{r}{a} \right)^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi$$

$$S_{nm} = \frac{1}{M} \iiint dV \rho \left( \frac{r}{a} \right)^n P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi$$

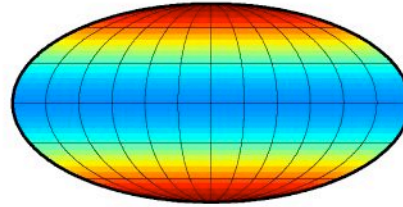




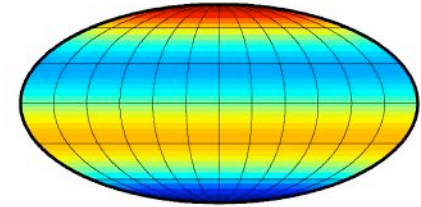
$l=1, m=0$



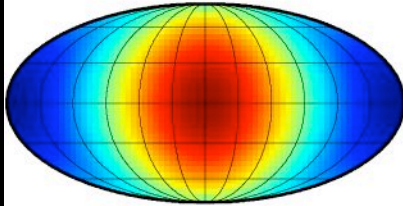
$l=2, m=0$



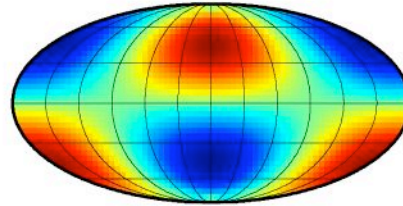
$l=3, m=0$



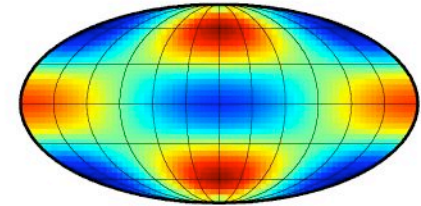
$l=1, m=1$



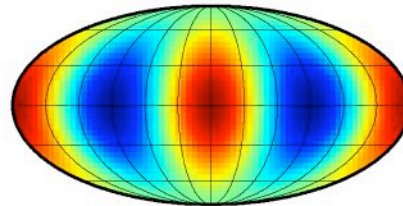
$l=2, m=1$



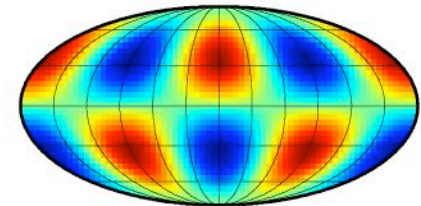
$l=3, m=1$



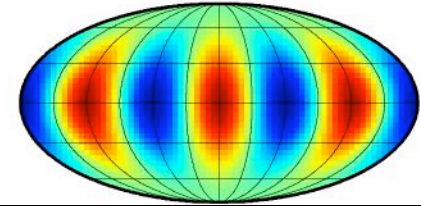
$l=2, m=2$



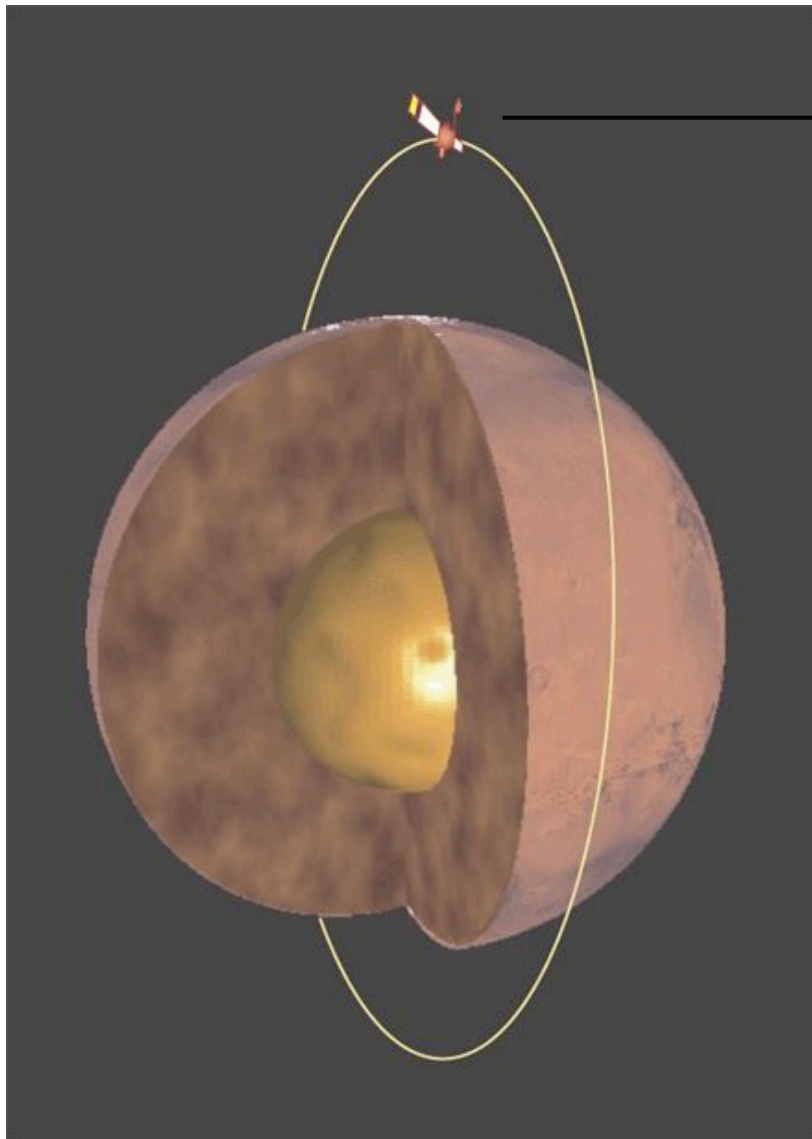
$l=3, m=2$



$l=3, m=3$



# Comment mesurer la gravité depuis l'orbite?



Signal Radio vers la Terre

$$\vec{F} = m\vec{a} = \int_V \frac{G \rho dV}{|r - r_{\text{quasicentr}}|^2} \hat{r}$$

*La force agissant sur le satellite dépend de la gravité*

La fréquence du signal dépend de la vitesse du satellite via un effet Doppler:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

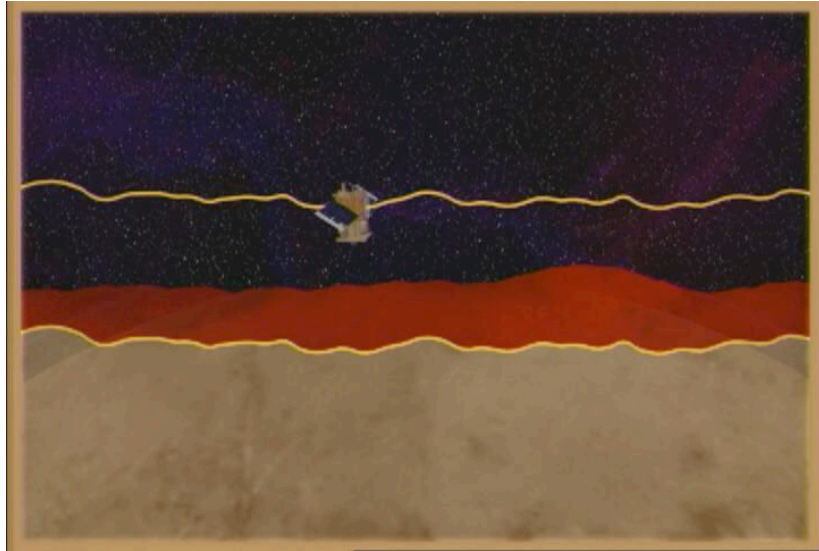
Comme

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Le champ de gravité peut être obtenu après analyse

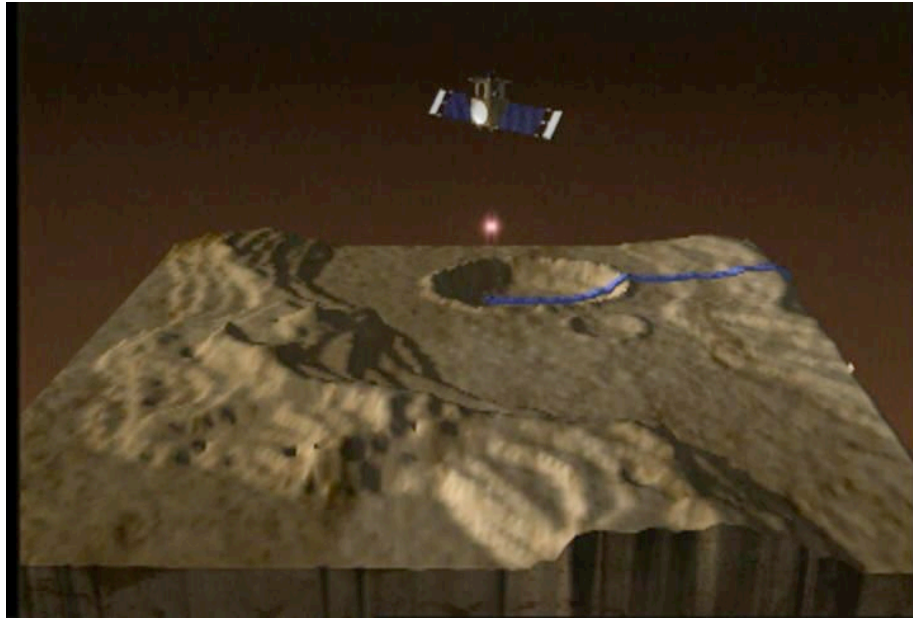
# Mars: Mesures de gravité: principe et évolution

---



- Mariner 9: première mesure grâce à l'effet Doppler (Bande S): par exemple Lorell, 1972, Born, 1974
  - Ellipticité et grande structures  $s < 4$
- Mariner 9 + Viking (Gapcynski et al., 1977, Christensen et Balmino, 1979, Balmino et al., 1982)
  - Grande structures tectoniques  $s < 16$
- Mars Global Surveyor: mesure en Bande X (moins d'effets de plasma) très fine (erreur de vitesse  $< 100 \mu\text{m/s}$ )
  - Structure fines  $s < 60-80$
  - Comparaison avec la Terre: 2/3 de la résolution de la mission GOCE, dont le lancement sera en ... 2004

# Altimétrie: principe et historique



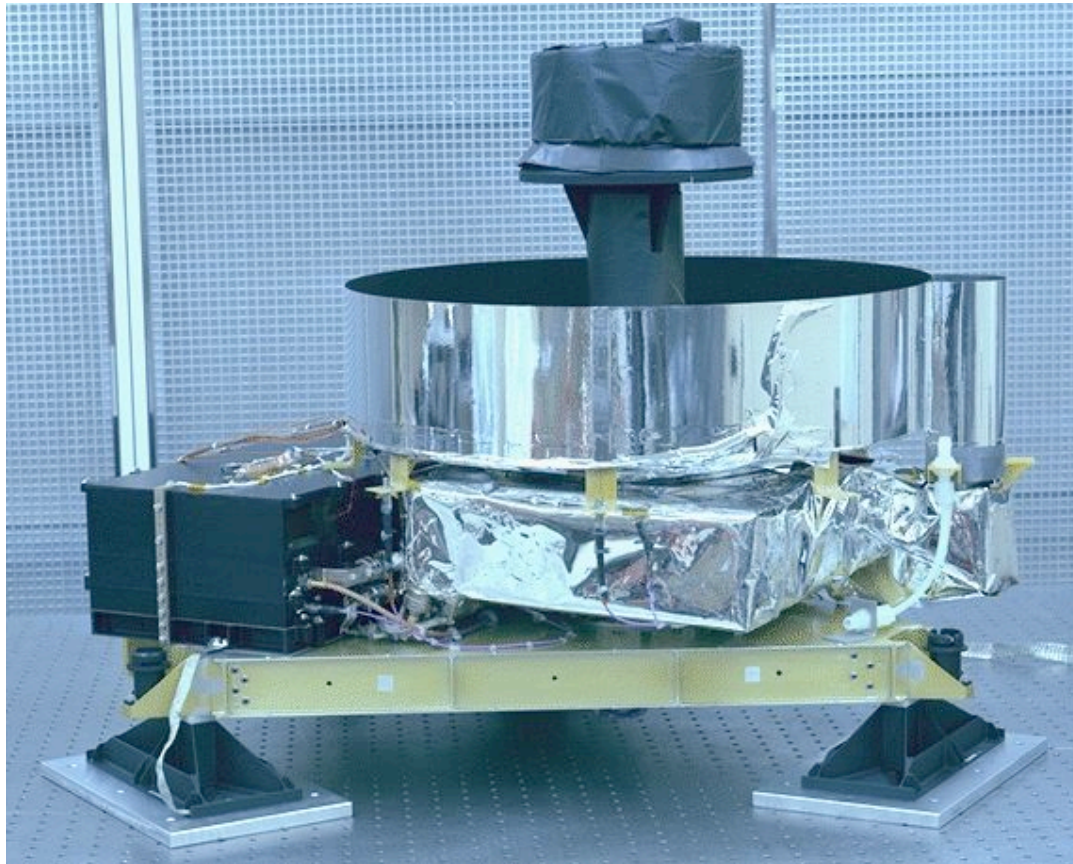
- Première mesure radar depuis la Terre (Goldstone, Aricebo, etc) 200 m de précision
- Mesure d'occultation radio des sondes Mariner 9 et Viking
  - Structure de grande échelle  $s < 8$

- MGS: expérience MOLA ( Zuber et al.)
  - Résolution latérale (taille du spot): 130-330 m
  - Résolution absolue: 10 m
  - Résolution relative: 35 cm



# MOLA: Mars Orbiter Laser Altimeter

---



Range Precision:  $\sim 37$  cm

Absolute Vertical Resolution:  $<10$  m

Surface Spot Size: 130 m

Along Track Shot Spacing:  $\sim 330$  m

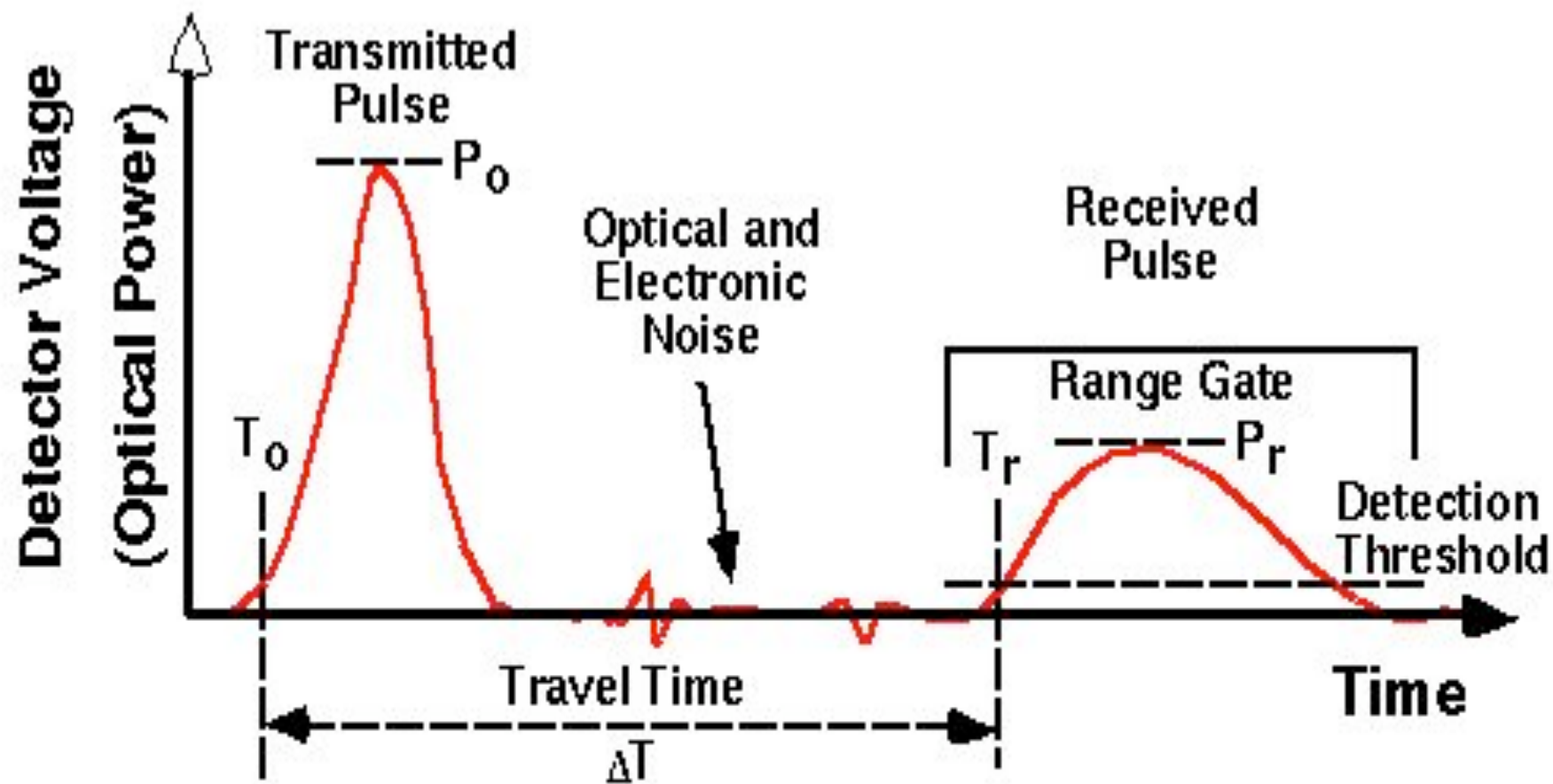
Cross-Track Spacing:  $\sim 1$ -30 km (equator)

Mass: 25 kg

Total number of Shots:  $\sim 640$  Million

Currently acting as a radiometer

# LASER RANGING SCHEMATIC



$$\text{Range } z = c \frac{\Delta T}{2}$$

- $T_0$  = Transmitted pulse time
- $P_0$  = Transmitted pulse power
- $T_r$  = Received pulse time
- $P_r$  = Received pulse power

# Hypothèse hydrostatique

Supposons une planète en équilibre isostatique, c'est-à-dire pour laquelle

$$0 = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}$$

Conséquence importante :

- $\vec{\nabla}p \times \vec{\nabla}U = \rho\vec{\nabla}U \times \vec{\nabla}U = 0$ , p et U sont constant sur les mêmes surfaces
- $\vec{\nabla} \times (\rho\vec{\nabla}U) = \vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}U = 0$ ,  $\rho$  et U sont constant sur les mêmes surfaces
- La surface de la planète, de pression constante, est une équipotentielle (géoïde)

Simplifications faites...

Dans la lithosphère élastique, déviateur de pré-contraintes

- Dans le manteau, forces de viscosité associées à la convection

$$\nabla \cdot \vec{\sigma}_{visq} \approx \frac{\eta v}{L^2} \sim 0.1 \text{ Pa/m}^2 \quad (\eta = 10^{21} \text{ Pa.s}, v = 1 \text{ cm/an} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}, L = 2000 \text{ km} = 2 \cdot 10^6 \text{ m})$$

$$\rho\vec{g} \sim 5 \cdot 10^4 \text{ Pa/m}^2$$

- Dans le noyau, forces de Coriolis, Forces de Lorentz

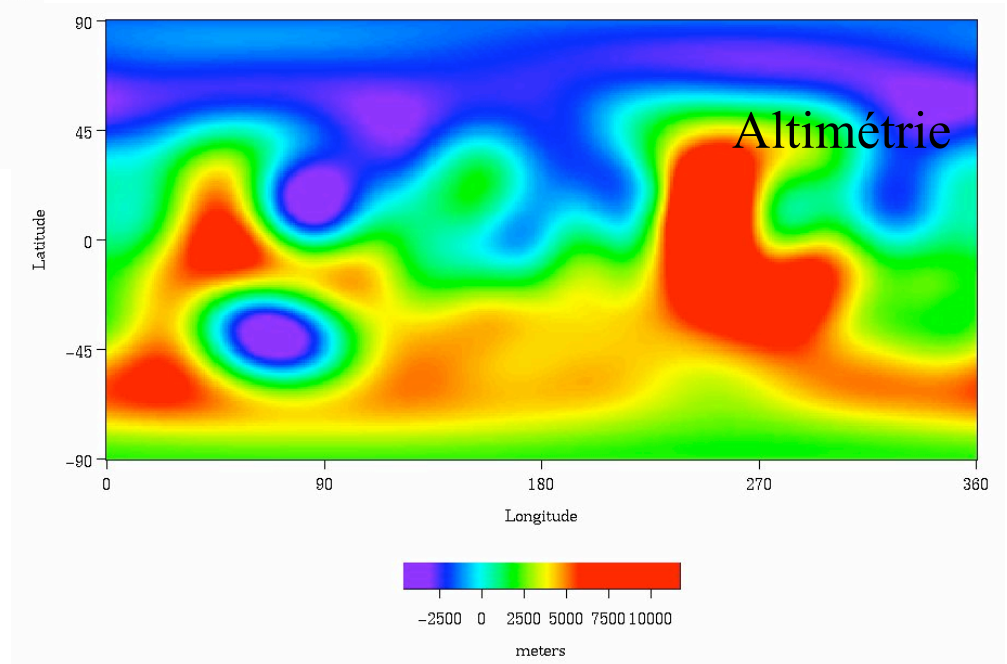
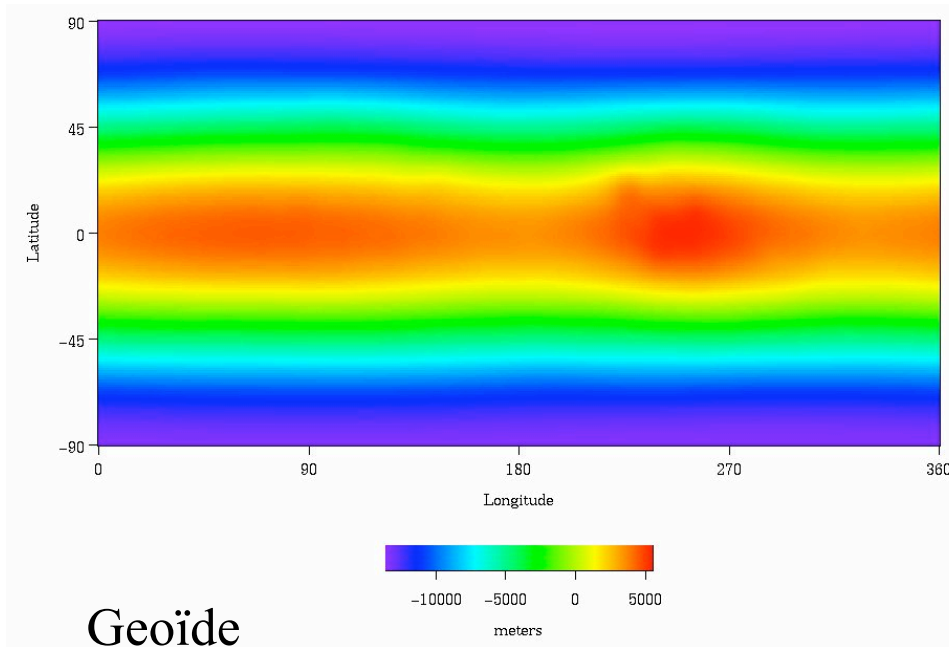
$$-2\rho\vec{\Omega}x\vec{v} \sim 10^{-8} \rho\vec{g} \quad (\Omega \sim 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}, v \sim 0.1 \text{ cm/s} \sim 10^{-3} \text{ m/s})$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times B) \times B \quad (\text{terme magnétique 10 fois plus petit})$$

Forces de viscosité négligeables

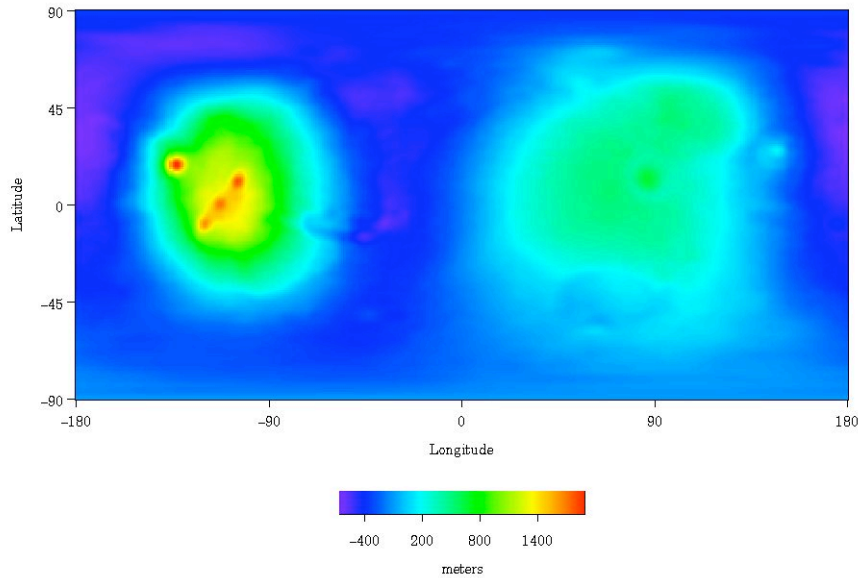
- Précision des mesures spatiales suffisantes pour détecter les effets des courants mantelliques sur la forme de la planète.

# Mariner 9... (1974)



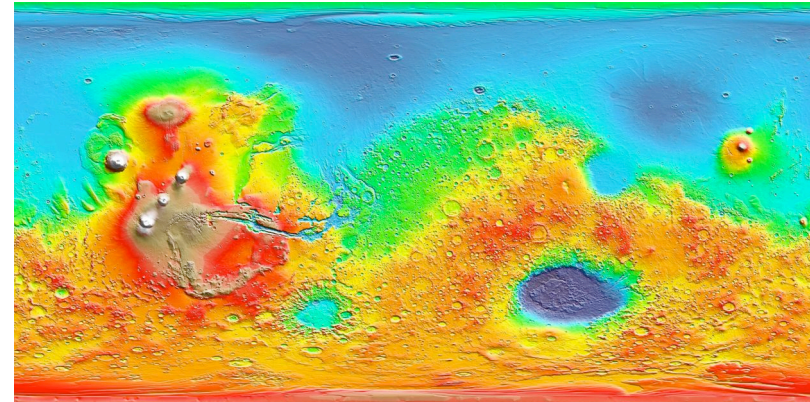


# Mars Global Surveyor (1997)

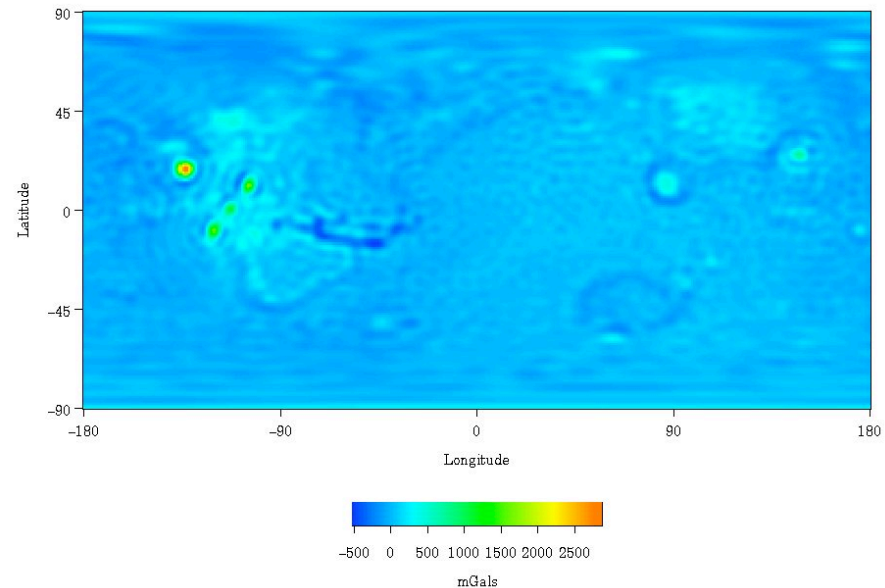


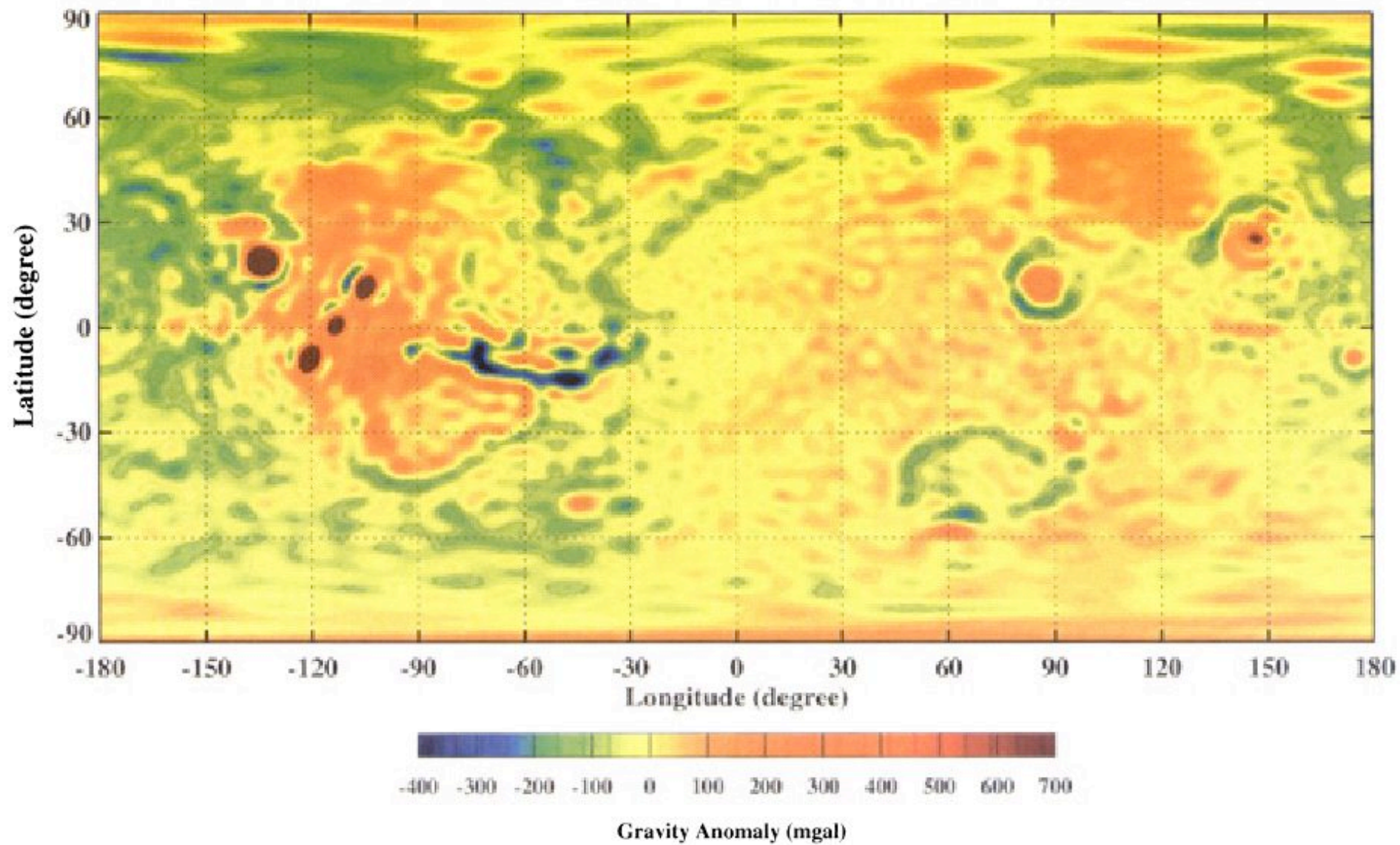
Variation du Géoïde  
par rapport à  
l'ellipsoïde de référence

Anomalies de gravité  
du géoïde par rapport à  
l'ellipsoïde de référence

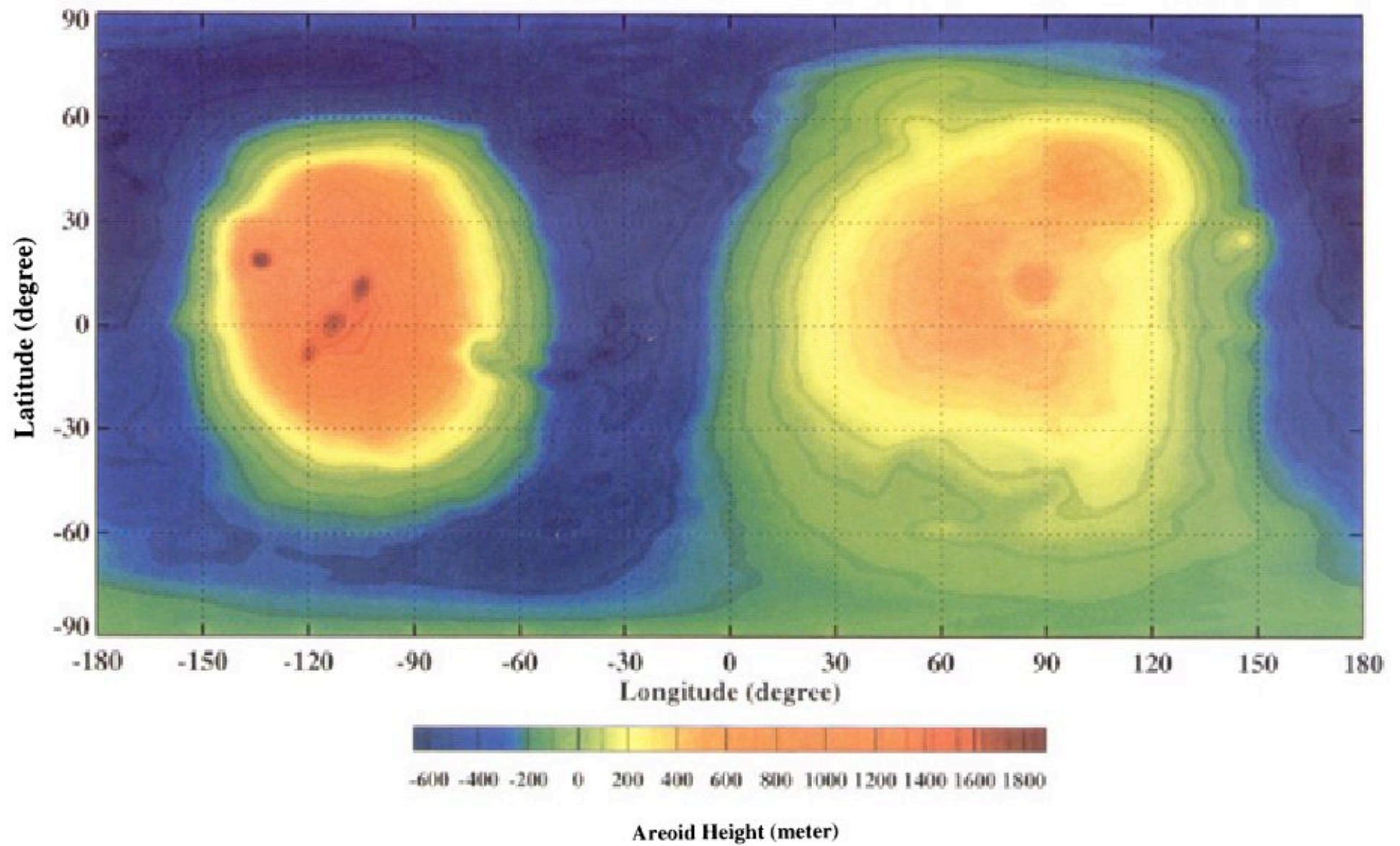


Altimétrie





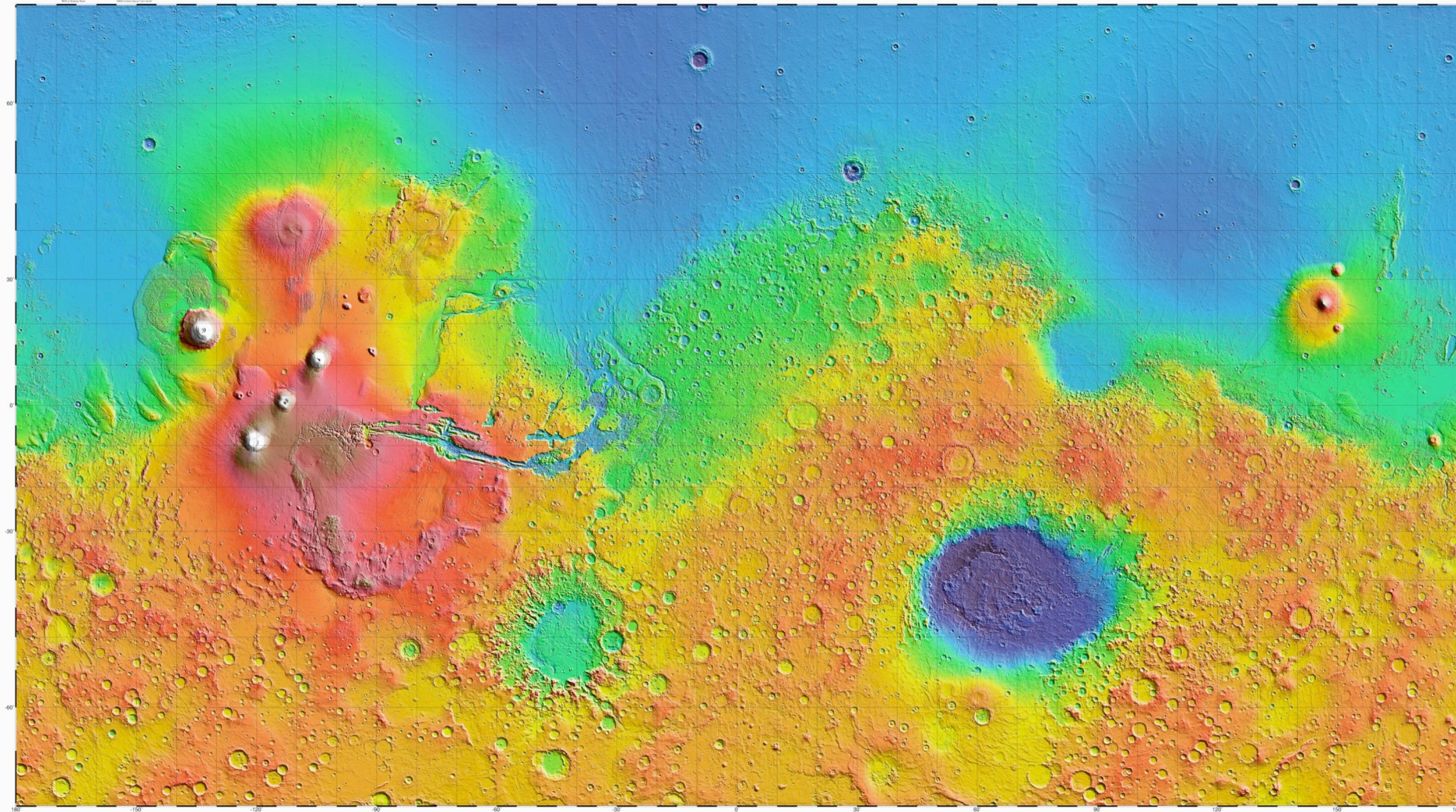
*Yuan et al. (2001)*

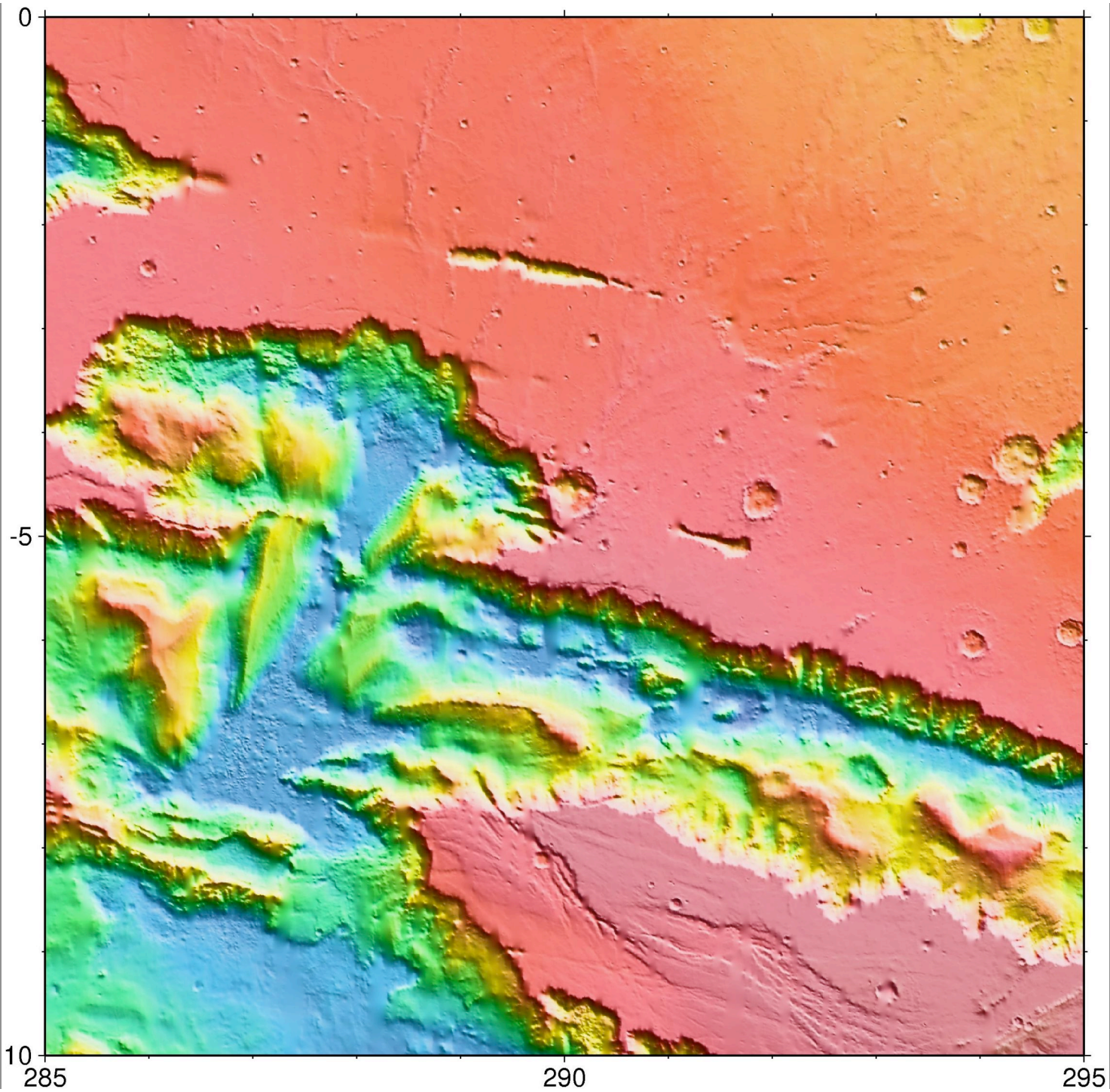


*Yuan et al. (2001)*

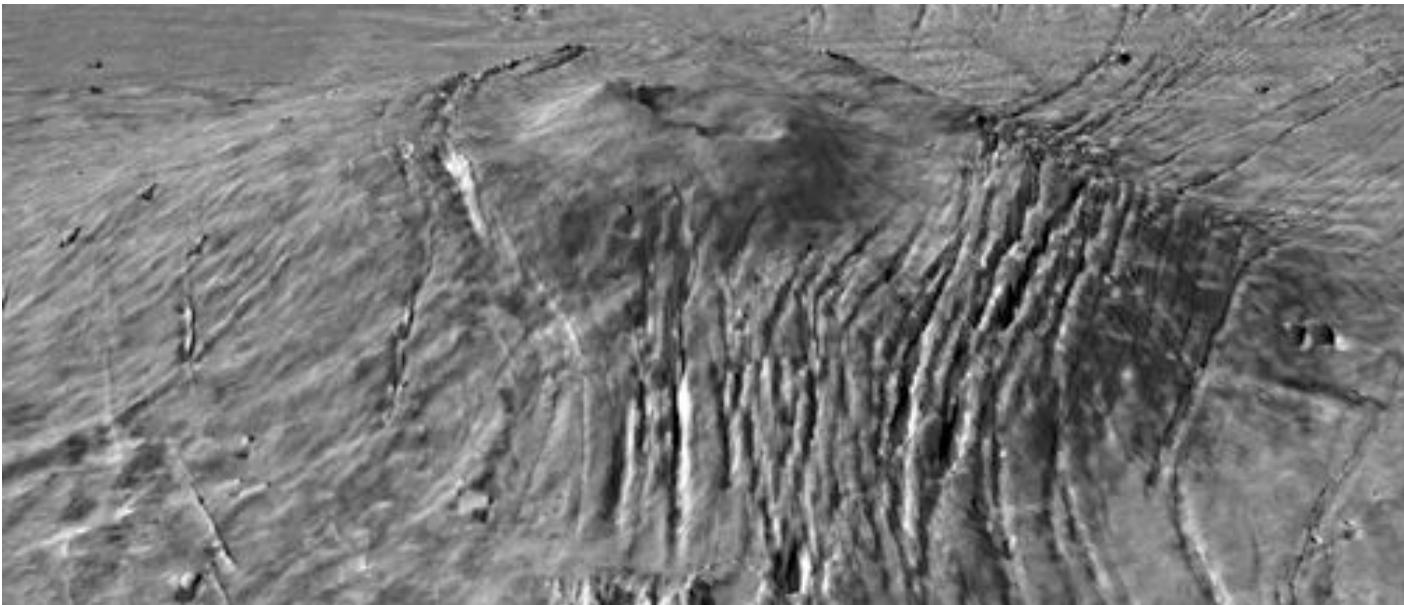
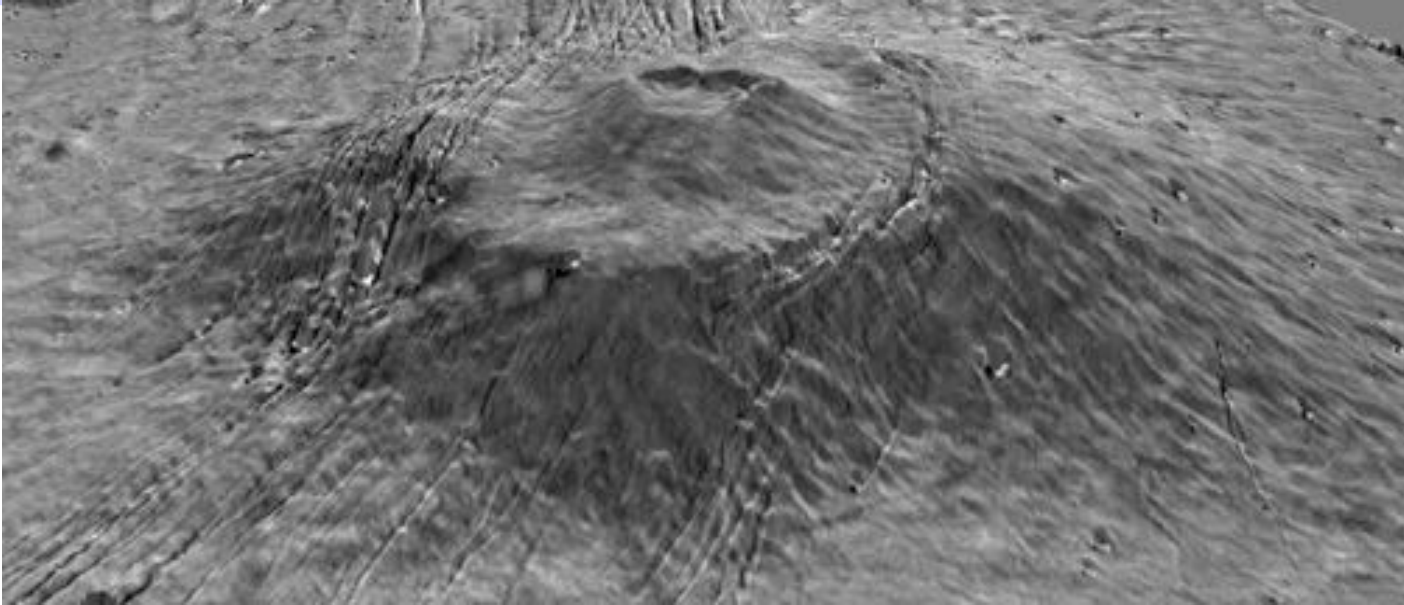


THE TOPOGRAPHY OF MARS BY THE MARS ORBITER LASER ALTIMETER (MOLA)



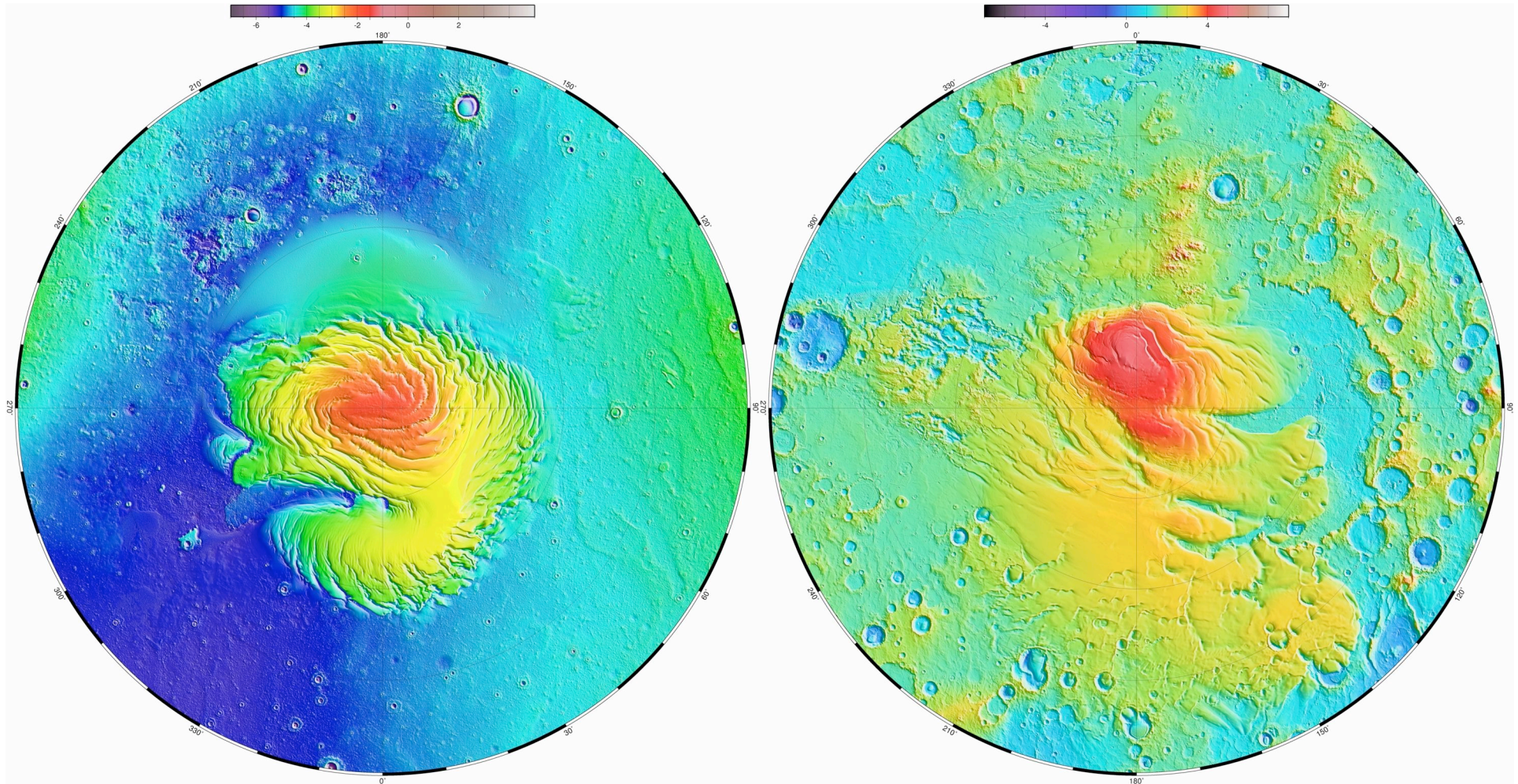


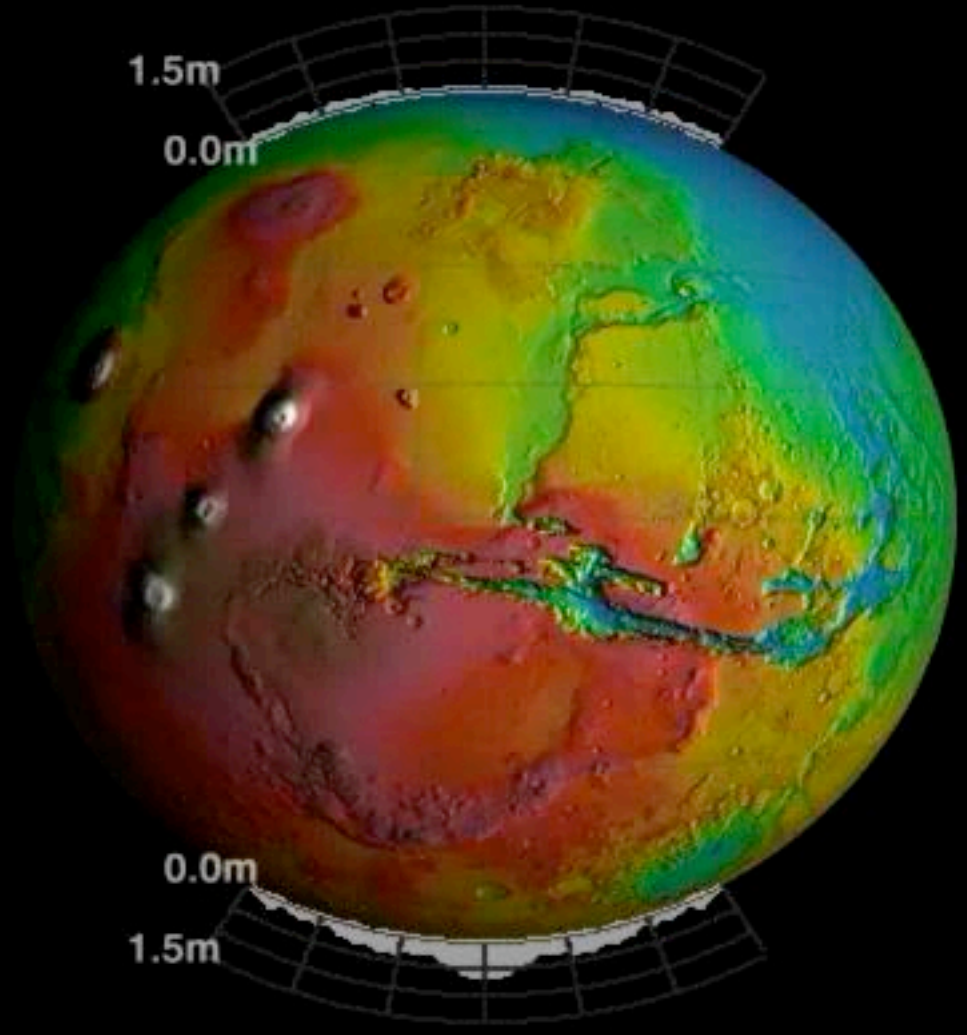
# Alba Patera



# North Polar Cap

# South Polar Cap





Mars Year



# $J_2$

---

Pour une planète elliptique, le potentiel de gravité (pesanteur) s'écrit:

$$U = -\frac{\mathcal{G}M}{r} + \frac{\mathcal{G}Ma^2}{2r^3}J_2(3\sin^2\theta - 1), \quad \text{gravité}$$

$$U = -\frac{\mathcal{G}M}{r} + \frac{\mathcal{G}Ma^2}{2r^3}J_2(3\sin^2\theta - 1) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\theta, \quad \text{pesanteur}$$

où  $J_2 = \frac{C-A}{Ma^2}$ .  $J_2$  et  $\frac{C-A}{A}$  permettent de trouver  $A$  et  $C$ . Si la précession n'est pas connue (par exemple pour Vénus, Mercure), il faut faire l'hypothèse d'une planète à l'équilibre hydrostatique.

La surface de la planète est alors une équipotentielle, et donc

$$\begin{aligned}U_0 &= -\frac{\mathcal{G}M}{a}\left(1 + \frac{1}{2}J_2\right) - \frac{1}{2}a^2\omega^2, \\ &= -\frac{\mathcal{G}M}{c}\left(1 - \frac{1}{2}J_2\left(\frac{a}{c}\right)^2\right),\end{aligned}$$

ce qui donne après résolution

$$f = \frac{a-c}{a} = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\frac{a^3\omega^2}{\mathcal{G}M}$$

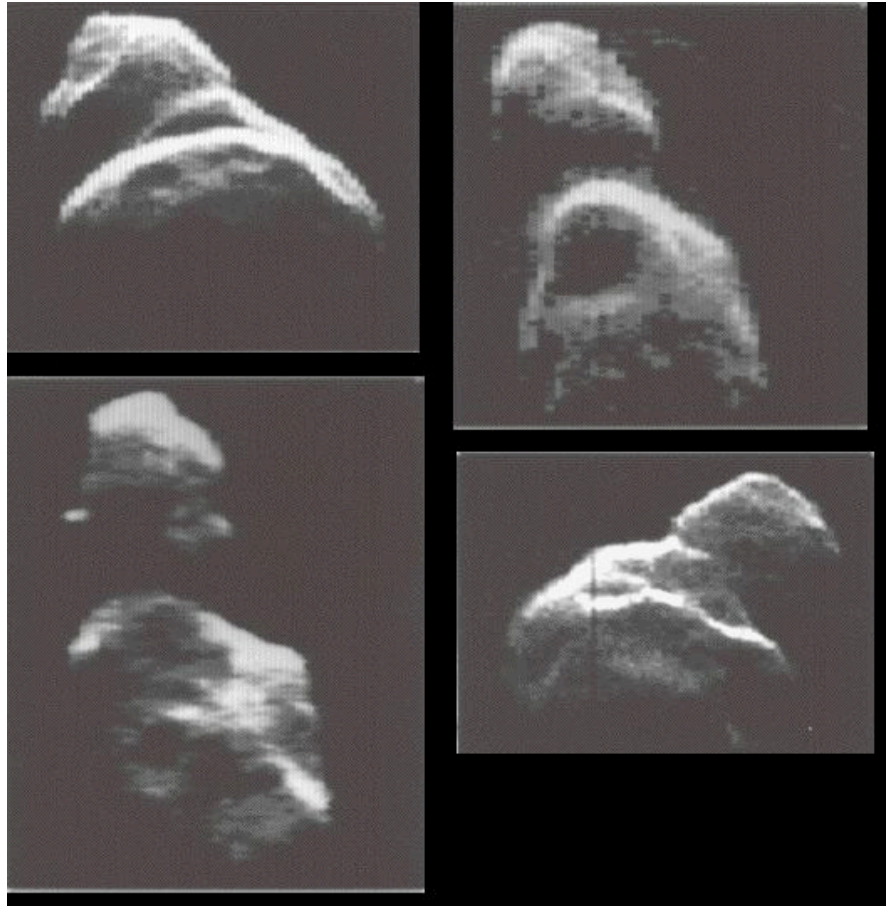
# Hypothèse hydrostatique

	$J_2 (10^{-6})$	$J_3 (10^{-6})$	$J_4 (10^{-6})$	$J_5(10^{-6})$	$J_6(10^{-6})$	$q_r$	$I/Mr^2$	$F (10^{-3})$	$\Delta F(\%)$
Mercure	60±20					$10^{-6}$			
Venus	4.46±0.03	- 1.93±0.02	-2.38±0.02			$6.1 \cdot 10^{-8}$			
Terre	1082.627	-2.532 ±0.002	- 1.620±0.003	-0.21	0.65	$3.45 \cdot 10^{-3}$	0.3355	3.35282	0.11
Lune	203,43 ±0.09					$7.6 \cdot 10^{-6}$	0.3932	0.7509	58.85
Mars	1960.5±0.2	31.5±0.5	-15.5±0.7			$4.57 \cdot 10^{-3}$	0.3662	6.117	14.57
Jupiter	14736±1	0	-587±5	0	31±20	0.089	0.254	64.87	-2.67
Saturn	16298±10	0	-915±40	0	103±50	0.155	0.210	97.96	-4.07
Uranus	3343.4±0.3	0	-28.9±0.5			0.029	0.23	22.93	14.89
Neptune	3411±10	0	-35±10			0.026	0.23	17.08	-6.06
Io	1863±90						0.378 ±0.005		
Europe	438±9						0.348 ±0.002		
Ganymède	127±3						0.3105 ±0.003		
Callisto	34±5						0.358 ±0.004		

- Planètes telluriques... de moins en moins vrai avec la taille
- Planète géante... effets non linéaire de la théorie

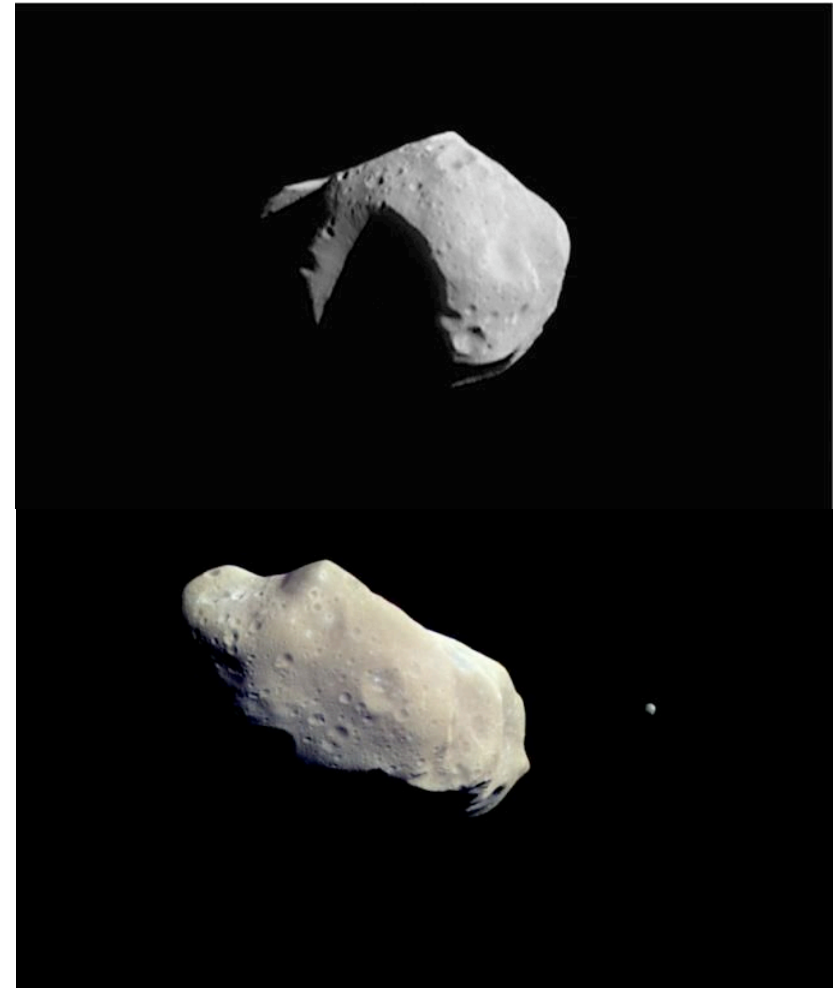
# Cas extrême non-hydrostatique

---



Toutatis ( 4 km x 2.5 km)  
Image Radar-Goldstone

Mathilde (59kmx47 km) -NEAR



IDA (58kmx23) - Galiléo

# Données astronomiques: hypothèses et démarches

Masse (M) +  
Rayon (a)



**Densité moyenne**

*Mars a un noyau métallique car aucune  
minéralogie du manteau raisonnable  
n'est possible sans noyau*

Théorie de Clairaut

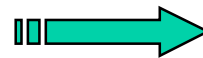
+  $J_2$  (ellipticité)  
+  $\omega_{\text{rotation}}$



Aplatissement en fonction de la  
profondeur si la planète est un fluide



+ Estimation des corrections  
non hydrostatiques  
+ Estimation de l'effet du  
dôme de Tharsis



**Moment d'inertie I**

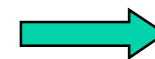
*Modèle à deux couches et encadrement de la taille du  
noyau pour les minéralogies raisonnables*

+ atténuation  
séculaire de Phobos



Modèle de planète à  
deux couches de  
rigidité différente  
(solide-solide ou  
solide liquide)

Marée solide



**Atténuation  
moyenne des  
parties solides**

Le noyau est a priori liquide

# Théorie des figures

---

- Objectif: calculer la forme des surface isodensité à l'intérieur d'une planète
- Intérêt: permet de calculer les moments d'inerties  $C$  et  $A$  à partir de  $f$ ,  $J_2$ .... Contraintes sur la structure interne à partir de survols de planètes
- Application
  - Mars... jusqu'en 1997 ( avec la mesure directe de  $A$  et  $C$  par mesure de précession)
  - Planètes géantes (  $J_2$ ,  $J_4$ ,  $J_6$ , ...)

# Théorie de Clairaut (1/2)

Supposons une planète en équilibre hydrostatique avec des rayons iso-densité définis par

$$r(s, \theta) = s \left( 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} e(s) P_n(\cos \theta) \right)$$

où  $r$  est le vrai rayon de la couche et  $s$  est le « rayon » de la couche dans un système de coordonnées déformés.

Considérons une calotte sphérique d'épaisseur  $ds$  et de rayon  $\rho(s)$ . On a, à l'extérieur de cette calotte un potentiel donné par

$$dU(r) = U(r, a + da) - U(r, a) = da \frac{\partial U}{\partial a}$$

où  $U(r, a)$  est le potentiel d'une sphère homogène de forme  $r(a, \theta)$  et de densité  $\rho(a)$ . Ce potentiel s'écrit, pour des points extérieurs

$$U_e(r, a) = -\frac{GM(a)}{r} \left[ 1 - \left[ \sum_{n=2}^{n=\infty} J_n \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] \right] = -\frac{4}{3} \pi G \rho(a) \left[ \frac{a^3}{r} - \left[ \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{3}{2n+1} e \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] \right]$$

en utilisant les définition de  $J_n$  et les propriétés des fonctions de Legendre.

À l'intérieur de la calotte sphérique, nous avons la même relation, mais cette fois-ci avec le potentiel

$$U_i(r, a) = \frac{GM(a)}{a} \left[ \frac{3}{2} \frac{r^2}{a^2} + \left[ \sum_{n=2}^{n=\infty} J_n \left( \frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] \right] = \frac{4}{3} \pi G \rho(a) \left[ \frac{3}{2} r^2 + \left[ \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{3}{2n+1} a^2 e \left( \frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] \right]$$

Le potentiel dans la planète, à un rayon  $r$ , peut donc s'écrire

$$U(r) = \int_0^r da \frac{\partial U_e}{\partial a} + \int_r^{a_0} da \frac{\partial U_i}{\partial a}$$

et le potentiel de pesanteur (avec l'accélération centrifuge) s'écrit alors

$$\begin{aligned} U(r) &= \int_0^r da \frac{\partial U_e}{\partial a} + \int_r^{a_0} da \frac{\partial U_i}{\partial a} - \frac{1}{2} r^2 \varpi^2 \sin^2 \theta \\ &= \int_0^r da \frac{\partial U_e}{\partial a} + \int_r^{a_0} da \frac{\partial U_i}{\partial a} - \frac{1}{3} r^2 \varpi^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{3} r^2 \varpi^2 P_2(\cos \theta) \end{aligned}$$

# Théorie de Clairaut (2/2)

$$U(r) = \text{Constante pour } r(s, \theta) = s \left( 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} e_n P_n(\cos \theta) \right)$$

Soit, au premier ordre

$$U(s) = -\frac{4}{3} \pi G \left[ \frac{1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} e_n P_n(\cos \theta)}{a} \int_0^s 3da \rho a^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3P_n(\cos \theta)}{2n+1} \left[ \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^s \rho d(e_n a^{n+3}) + a^n \int_a^{a_0} \rho d\left(\frac{e_n}{a^{n-1}}\right) \right] \right]$$

$$-\frac{1}{3} r^2 \varpi^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{3} r^2 \varpi^2 P_2(\cos \theta)$$

d'où, après multiplication par  $a^{n+1}$  et différenciation

$$-(s^n \frac{de_n}{dr} + ns^{n-1} e_n) \int_0^s \rho a^2 da + s^{2n} \int_a^{a_0} \rho \frac{d}{da} \left( \frac{e_n}{a^{n-2}} \right) da = -\frac{5\varpi^2 a^4}{8\pi G} \delta_{20}$$

qui peut aussi s'écrire, avec le densité moyenne au rayon  $s$  :

$$-(s^n \frac{de_n}{dr} + ns^{n-1} e_n) \frac{s^3 \bar{\rho}}{3} + s^{2n} \int_s^{a_0} \rho \frac{d}{da} \left( \frac{e_n}{a^{n-2}} \right) da = -\frac{5\varpi^2 s^4}{8\pi G} \delta_{20}$$

Cette équation, après simplification, fut trouvée par Clairaut (1743). On montre que tous les

termes  $n \neq 2$  sont nuls (au premier ordre). Pour le terme  $e_2$ , un changement de variable  $\eta = \frac{s}{e} \frac{de}{ds}$

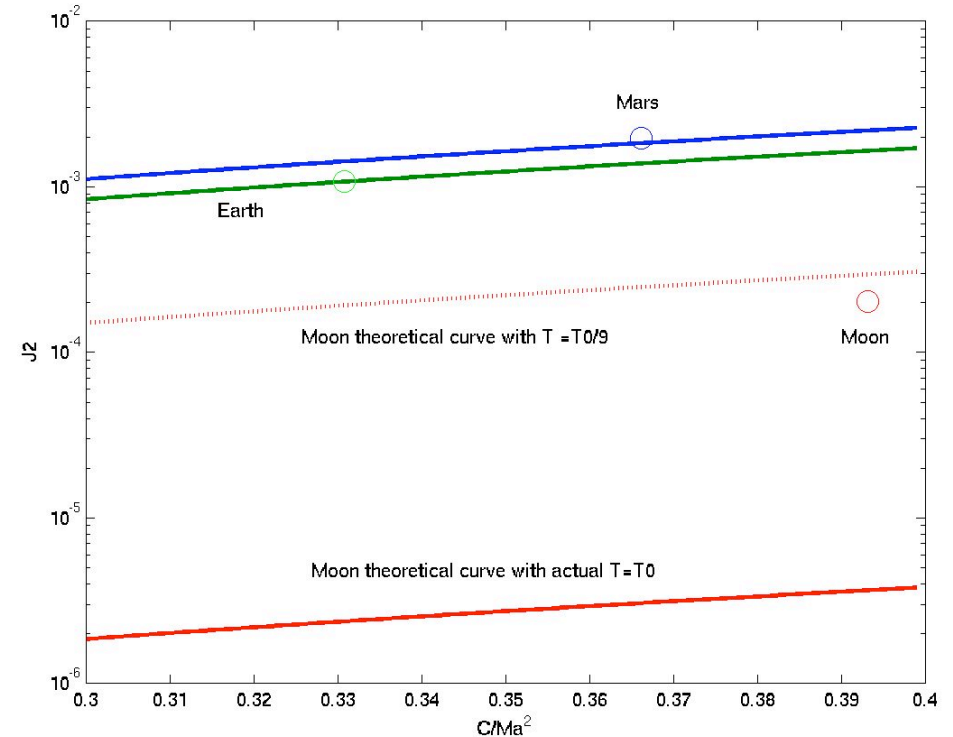
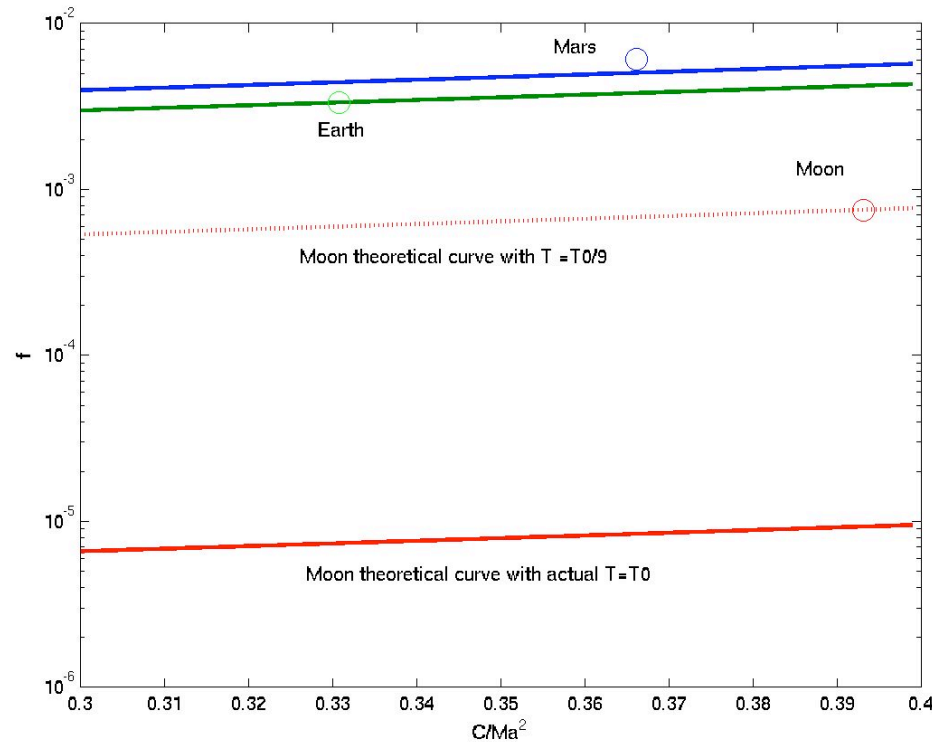
conduit alors à une équation plus simple, dite équation de Radau

$$\frac{d}{ds} \left( \bar{\rho} s^5 (1 + \eta)^{1/2} \right) = 5 \bar{\rho} s^4 \psi(\eta)$$

$$\psi(\eta) = \frac{1 + \frac{1}{2} \eta - \frac{1}{10} \eta^2}{\sqrt{1 + \eta}}$$

Pratiquement, on peut souvent simplifier cette équation en supposant  $\psi(\eta) \approx 1$

# Application de la Théorie de Clairaut



- Très bon accord pour la Terre....
- Accord moyen pour Mars
- Mauvais accord pour la Lune, sauf si une vitesse de rotation 9 x plus importante est supposée



# Comment mesurer A et C? (1/2)

---

Considérons une planète en rotation autour de son centre de gravité. Cette planète subit un certain nombre de forces extérieures, telles que les forces de gravités des autres astres qui, par l'intermédiaire de la force de marée produiront des variations temporelles du moment cinétique. Ce dernier n'est donc pas isolé, et va varier dans le temps, tant en amplitude qu'en direction. On peut préciser ce problème en écrivant le théorème du moment cinétique dans le repère mobile lié à la planète. Dans ce repère, le moment cinétique vaut

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \int dV \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}), \\ &= (pA, qB, rC)\end{aligned}$$

où  $A, B, C$  sont les moments d'inerties par rapport aux axes  $x, y, z$  de la planète, qui valent

$$\begin{aligned}A &= \int dV \rho(y^2 + z^2), \\ B &= \int dV \rho(x^2 + z^2), \\ C &= \int dV \rho(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

# Comment mesurer A et C? (2/2)

---

La dérivation du moment cinétique dans le repère mobile conduit alors aux équations On peut alors appliquer le théorème du moment cinétique par rapport au repère tournant, ce qui donne alors

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{J}}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \\ &= (qr(C - B), pr(A - C), pq(B - A))\end{aligned}$$

et on obtient alors finalement les équations qui régissent la rotation d'une planète, dites équations d'Euler

$$\begin{aligned}A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= L \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= M \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= N\end{aligned}$$

Cas elliptique:

A=B

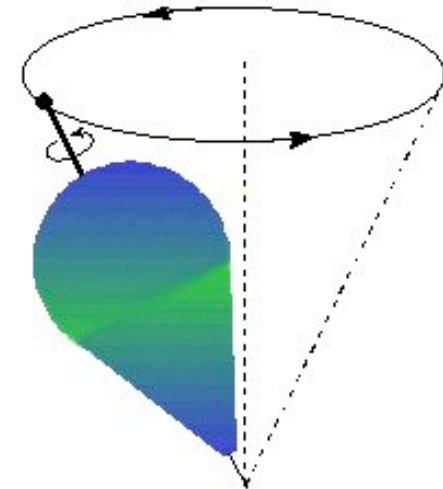
Paramètre:

(A-C)/A

# Mesurer le moment d'inertie

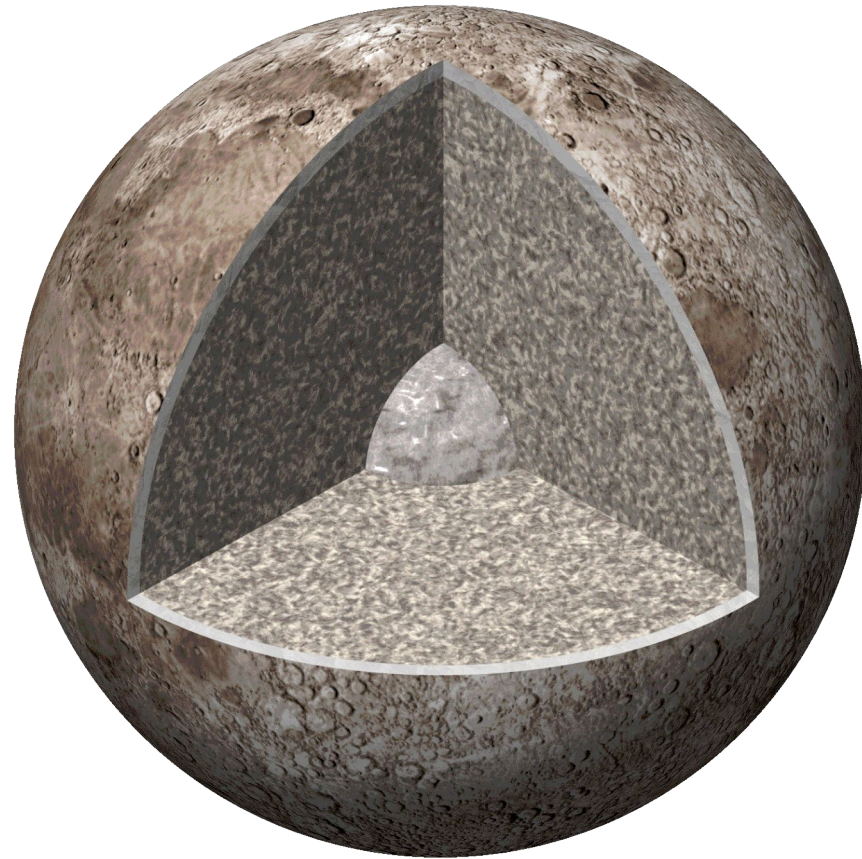
---

- Etude de la rotation des planètes
- Pour la Terre, première étude faite par Hyparque vers 130 AC
  - Période de précession de 26 000 ans
- La rotation est connue avec précision
  - depuis les missions Apollo pour la Lune
  - Depuis le mission Pathfinder pour Mars
  - Elle reste inconnue pour Mercure et pour Vénus

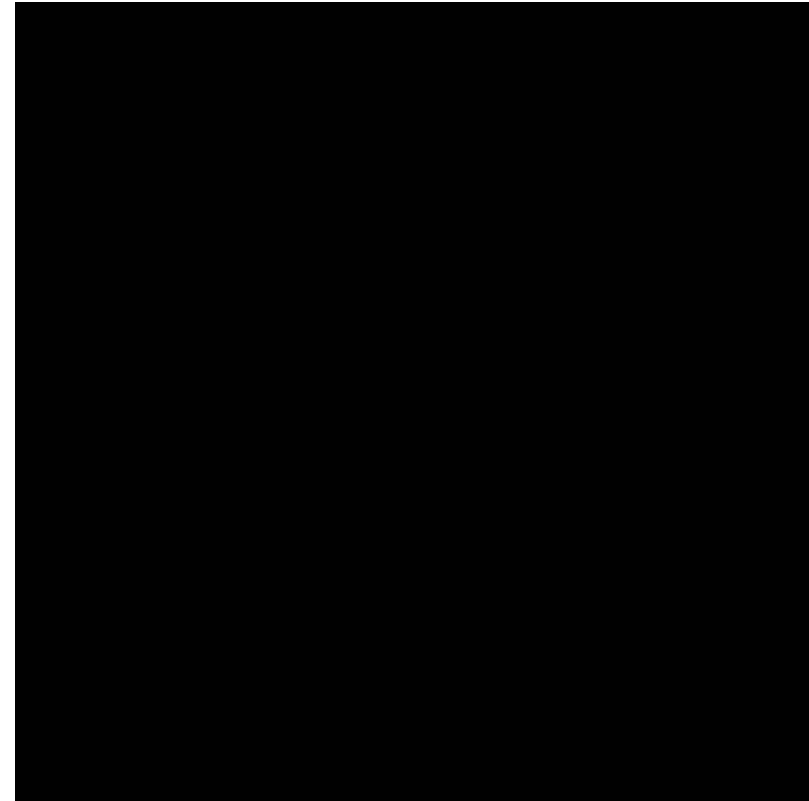
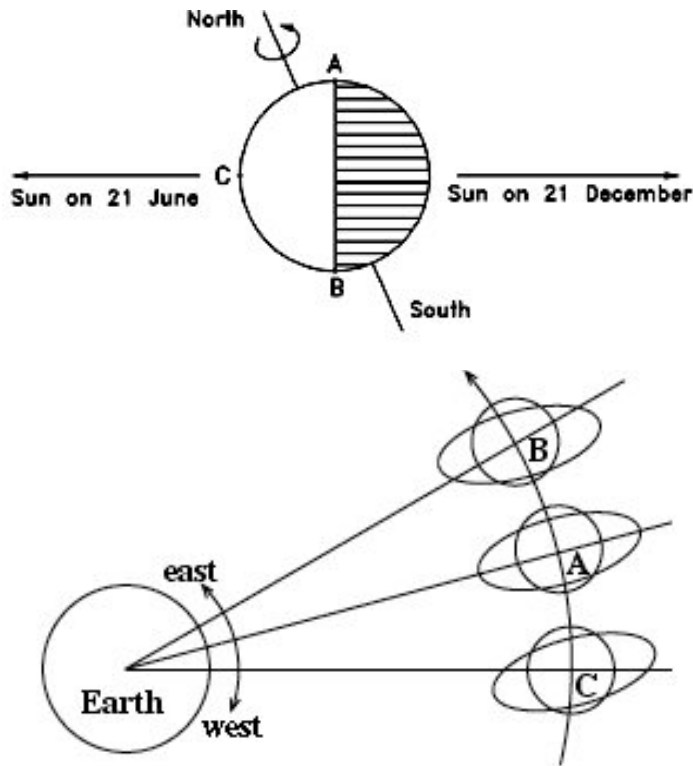


# Lune...

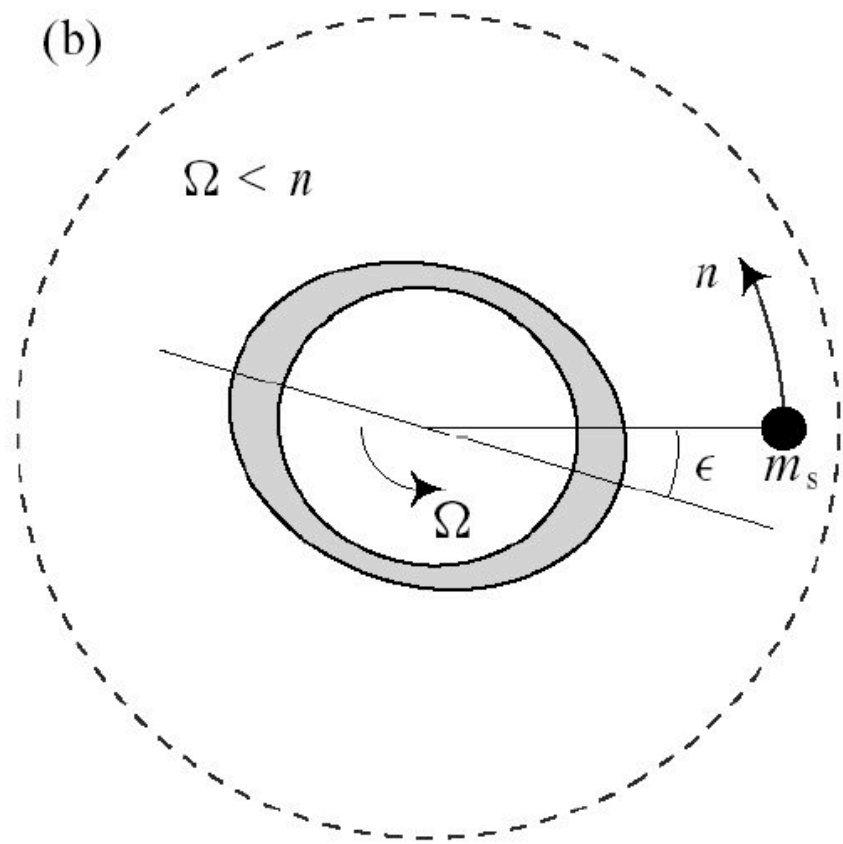
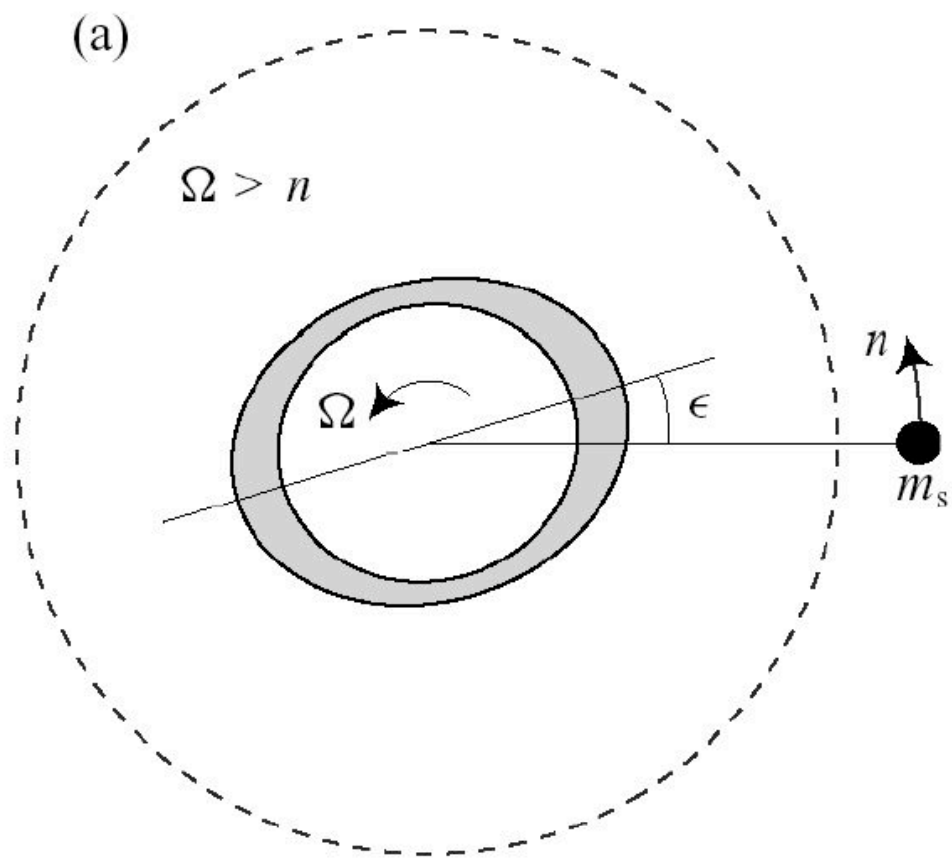
---



# Rotation de la Lune et librations



- rotation synchrone
- libration géométrique ( associées à l'orientation de l'axe de rotation sur l'ecliptique:  $6^{\circ}50'$ , effet de rotation/ellipticité:  $7^{\circ}54'$ , effet de taille finie:  $1^{\circ}$ )... pas d'information mais 59% de la surface de la Lune visible
- libration physique ( pôle-à-pôle,  $1.5^{\circ}$ , longitudinale:  $0.25'$ )



les forces de marée sont une des premières manifestations du fait que les planètes ne sont pas ponctuelles, mais de la taille finie. A l'échelle de la planète en effet, les forces d'attraction gravitationnelle ne sont pas homogènes. Le centre des planètes seront donc attirés par les autres astres différemment que leur bords, induisant une faible déformation de ces planètes.

Pour exprimer la force de marée, considérons une planète de rayon  $a$ , soumise

à l'attraction gravitationnel d'un corps de masse  $m$  situé à une distance  $R = |\mathbf{r}|$  du centre de la planète. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un point matériel dans le repère lié à la Terre donne

$$m \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{f} + \mathcal{G} m M \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} - m \gamma_{inertie} \quad (20)$$

Les forces d'inerties comprennent les forces liées à la rotation de la Terre (accélération centripète et accélération de Coriolis), mais aussi l'accélération d'entraînement liée à l'attraction de l'astre de masse  $M$  sur la Terre. Cette force est donc simplement

$$\gamma_{inertie} = \mathcal{G} M \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \quad (21)$$

On voit qu'il apparaît une force qui fait apparaître la différence d'attraction gravitationnelle entre un point du globe et le centre de la planète. Cette accélération s'écrit alors

$$\mathbf{f}_{Marée} = \mathcal{G} M \left[ \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \right] = -\nabla \phi_{Marée} \quad (22)$$

où  $\phi_{Marée}$  est le potentiel de marée. Ce potentiel est donnée par

$$\phi_{Marée} = -\mathcal{G} M \left[ \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{R}|^3} \right] \quad (23)$$

Exprimons alors le potentiel de la force d'attraction gravitationnel.

$$V(\mathbf{r}) = -\mathcal{G} \frac{M}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \quad (24)$$

Si la distance  $R$  est grande devant  $r$ , on peut faire un développement limité du potentiel par rapport aux puissances de  $x = r/R$ . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} &= \frac{1}{R} (1 - 2x \cos \theta + x^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{R} (1 + x \cos \theta \\ &+ x^2 (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}) + x^3 (\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta) + \dots) \end{aligned} \quad (25)$$

Si l'on dérive ce potentiel, on trouve l'expression des accélérations perturbatrices. Soit, en posant  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{R}$ , et en remarquant que

$$\nabla r \cos \theta = \mathbf{u} \quad (26)$$

$$\nabla r = \mathbf{e}_r \quad (27)$$

$$(28)$$

## Rappel: Marée fluide (1/2)

on a finalement

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots \quad (29)$$

avec

$$\gamma_0 = + \frac{\mathcal{G} M}{R^2} \mathbf{u} \quad (30)$$

$$\gamma_1 = + \frac{\mathcal{G} M}{R^3} (3 \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - r \mathbf{e}_r) \quad (31)$$

$$\gamma_2 = + \frac{\mathcal{G} M}{R^4} (\frac{15}{2} \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u} r^2 - 3 r \mathbf{e}_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \quad (32)$$

le premier terme correspond à l'accélération d'attraction exercée au centre de la planète. Cette accélération est celle qui entraîne la planète le long de sa trajectoire. Si on se place dans un repère lié à la planète, elle disparaît, car opposée à l'accélération liée à l'inertie de la planète. Les accélérations supplémentaires sont les accélérations de la marée. Le potentiel de Marée est, si on se limite au premier terme

$$\phi_{Marée} = -\frac{\mathcal{G} M r^2}{R^3} (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}) - \frac{\mathcal{G} M r^3}{R^4} (\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta) \quad (33)$$

Dans la plupart des cas, le potentiel de marée peut être négligé pour ses termes supérieurs. Seul le terme en  $r^2/R^3$  est alors à considérer. En effet, ceci est tout à fait justifié lorsque l'argument  $x$  de la série est petit: c'est le cas pour les marées créées par le soleil sur les planètes ( $x = 4 \times 10^{-6}$  pour la Terre par exemple). Ce terme est souvent petit pour les marées créées par les satellites sur la planète, mais pas toujours. On a pour la Lune  $x = 0.0167$ , mais pour la marée de Phobos sur Mars  $x = 1/2.76$ ,  $x = 1/13$  pour la marée de Charon sur Pluton. Négliger les termes supérieurs représente alors une erreur de l'ordre du pourcent sur Terre, mais plus importante encore sur Mars. Nous allons maintenant étudier les conséquences de cette force de marée. Pour commencer, considérons une planète fluide et négligeons la compressibilité. Quelle est la forme de la planète, lorsqu'elle est soumise aux forces conjuguées de sa pesanteur et de la force de marée?

Pour répondre à cette question, considérons le potentiel de pesanteur de la planète  $W(\mathbf{r})$ , à partir duquel dérive la pesanteur par la relation  $\mathbf{g} = -\nabla W$ . La surface de la planète est une surface d'équilibre et doit donc être une surface équipotentielle de la somme des divers champs de potentiels. On obtient donc

$$W_{total}(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \quad (34)$$

Appelons  $\mathbf{r}_0$  la position de la surface en l'absence de marée. Considérons que le potentiel de marée  $U$  est petit devant le potentiel de la pesanteur, et que la déformation de la surface par la marée est également faible. En différenciant la

relation (xx) autour de la position d'équilibre nous déduisons que la surface est une équipotentielle lorsque la quantité:

$$-\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}_0(\mathbf{r}_s) + U(\mathbf{r}_s) \quad (35)$$

est constante. La valeur de cette constante peut être calculée en supposant la planète incompressible. La variation de volume totale produite par la marée doit être nulle. Intégrant la relation sur la surface, on déduit alors que cette constante doit être égale à la valeur moyenne du potentiel perturbateur, ce qui donne finalement:

$$\frac{U(\mathbf{r}_s) - \frac{1}{4\pi} \int d\Sigma U(\mathbf{r}_s)}{\mathbf{g}_0(\mathbf{r}_s)} = \delta h \quad (36)$$

où  $\delta h$  représente la hauteur de la déformation perpendiculaire à la surface non déformée de la planète (et donc parallèlement à son champ de pesanteur). En remarquant que la valeur moyenne de la perturbation du potentiel de marée est nulle, on en déduit finalement l'expression de la déformation de la surface de la planète par la force de marée:

$$\delta h = h_0 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \quad (37)$$

where  $h_0 = \frac{GM_s^2}{g_0 R^3}$ .

Sun/Mercury	Sun/Earth	Sun/Mars	Sun/Jupiter	Moon/Earth	Phobos/Mars
1 m	16 cm	2,6 cm	5,7 cm	36 cm	2,4 mm

Table 1: Amplitude of the tidal amplitude

Ces relations donnent l'amplitude des marées sur divers planètes. Mis à part Mercure, les marées terrestres comptent parmi les plus importantes dans le système solaire, par l'action conjuguée du Soleil et de la Lune. Les relations que nous venons d'obtenir, dans le cas de la Terre, sont également valables pour les marées océaniques. Néanmoins pour ces dernières des phénomènes de résonance peuvent avoir lieu, amplifiant les amplitudes des ondes océaniques.

En fait, il faut en plus considérer dans le cas de la Terre le fait que la Terre est inclinée par rapport au plan de l'écliptique. L'inclinaison est de  $\theta$  degrés. On doit donc alors écrire le cosinus sous la forme

$$\cos \Theta = \sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \cos(H - \phi) \quad (38)$$

Si on remplace cette expression dans le potentiel, on trouve alors

$$\frac{3 \cos^2 \Theta - 1}{2} = \left(1 - \frac{3 \cos^2 \theta}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{3 \cos^2 \delta}{2}\right)^2 \quad (39)$$

$$+ 3 \cos \theta \sin \theta \cos \delta \sin \delta \cos(H - \phi) \quad (40)$$

$$+ \frac{3}{4} \cos^2 \theta \cos^2 \delta \cos 2(H - \phi) \quad (41)$$

## Rappel: Marée fluide (2/2)

---

Le premier terme s'appelle terme zonal. Il ne dépend pas de la longitude de la lune, mais seulement de l'angle entre le plan équatorial de la Terre et le plan de l'orbite lunaire, c'est à dire la déclinaison de la Lune. Ce terme va varier avec une période deux fois plus faible que la période lunaire, soit environ 13,666 jours (Onde Mf). A cela se rajoute la variation de la distance Terre-Lune, ce qui fait une période égale à la période lunaire, 27,555 jours (onde Mm). Le second terme fait apparaître un terme en  $\cos(H - \phi)$ , qui va faire intervenir la période de rotation de la Terre par rapport à la Lune, soit 24h04. Au voisinage de cette onde, on trouvera une série d'ondes de marée provenant des compositions de cette dernière avec les variations plus lentes de déclinaison et d'ellipticité. Cette onde est l'onde diurne. Enfin, on a enfin le troisième terme qui comprend un terme qui varie avec une fréquence deux fois plus grande que la vitesse de rotation angulaire de la Lune, et donc avec une période de 12h25, qui est l'onde semi-diurne...



# Marée solide

---

- Dans le cas d'une planète solide, les marées sont obtenues par la résolution de l'équation de l'élastodynamique...

$$\rho_0 (\partial_t \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}) = 0 = \nabla \cdot (\mathbf{T}_{elastic} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}_0) - \text{div}(\rho_0 \mathbf{u}) \mathbf{g}_0 - \rho_0 \nabla \Phi_{E_t} - \rho_0 \nabla \Phi_{marées} \quad (1)$$

avec pour les pré-contraintes:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_0 + \rho_0 (\mathbf{g}_0 + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')) = 0 \quad (2)$$

pour la redistribution des masses:

$$\nabla^2 \Phi_{E_t} = -4\pi G \text{div}(\rho_0 \mathbf{u}) \quad (3)$$

et pour les contraintes élastiques:

$$\delta \mathbf{T}_{elastic}^{ij}(\mathbf{r}, t) = C^{ijkl} D_k u_l(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

avec dans le cas isotrope

$$C^{ijkl} = \left( \kappa - \frac{2}{3} \mu \right) g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \quad (5)$$

# Marée solide et ralentissement

---

Considérons une Terre à symétrie sphérique. Le déplacement de la Terre produit par la marée pour une planète fluide incompressible peut s'écrire sous la forme:

$$u(r) = \frac{\mathcal{G}Mr^2}{gR^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

où  $\theta$  est l'angle entre le point et la direction de l'astre produisant la marée. Dans une planète non-fluide, ce déplacement s'exprimera sous la forme

$$u(r) = H(r) \frac{\mathcal{G}Mr^2}{gR^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) = -H(r) \frac{\phi_{Maree}}{g}$$

A la surface, la grandeur  $H(a) = h$  définit un nombre appelé nombre de Love. On peut également définir d'autres nombres de Love. L'un est relié au potentiel d'attraction gravitationnel de la Terre, qui sous l'effet des marées, se retrouve perturbé et devient:

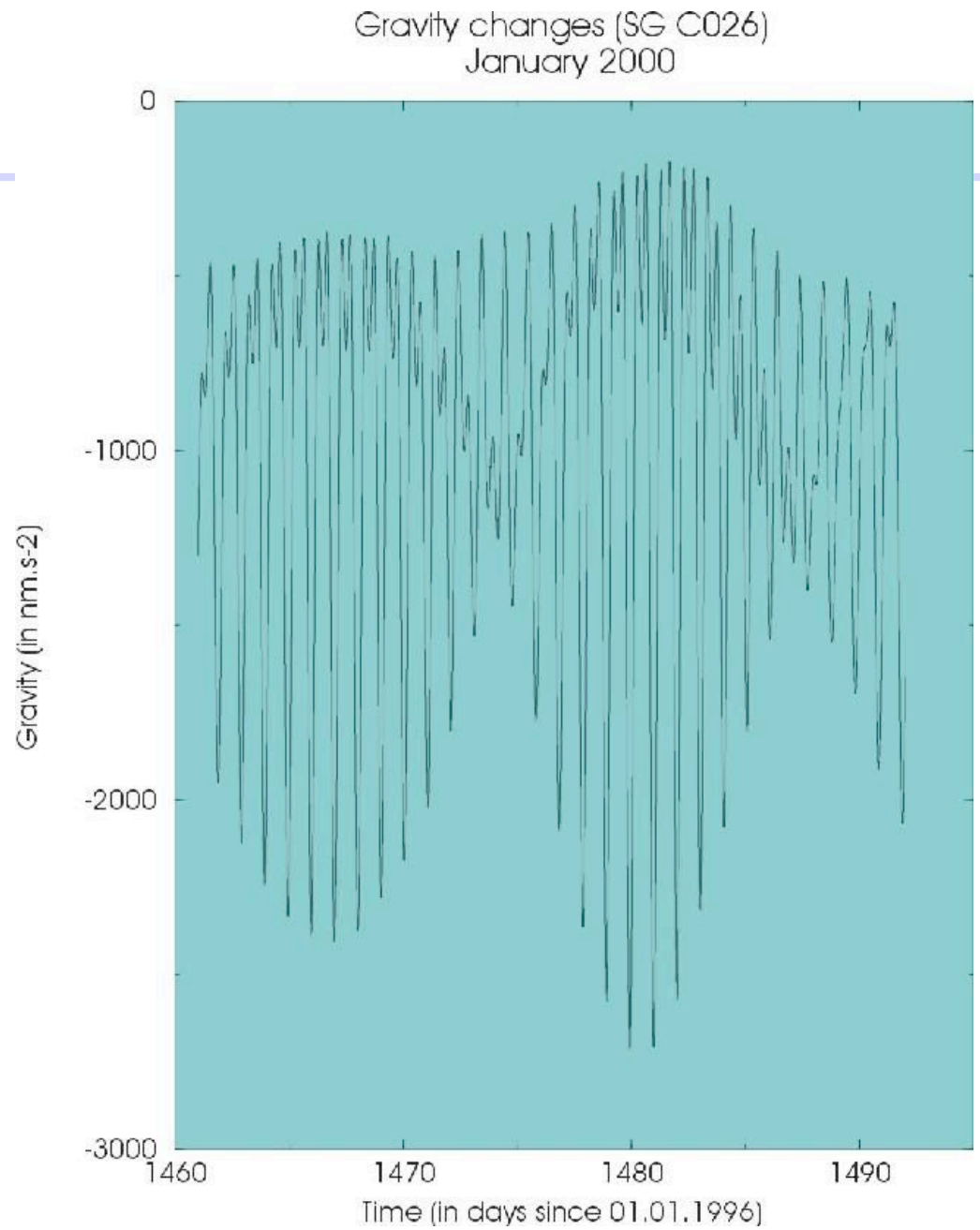
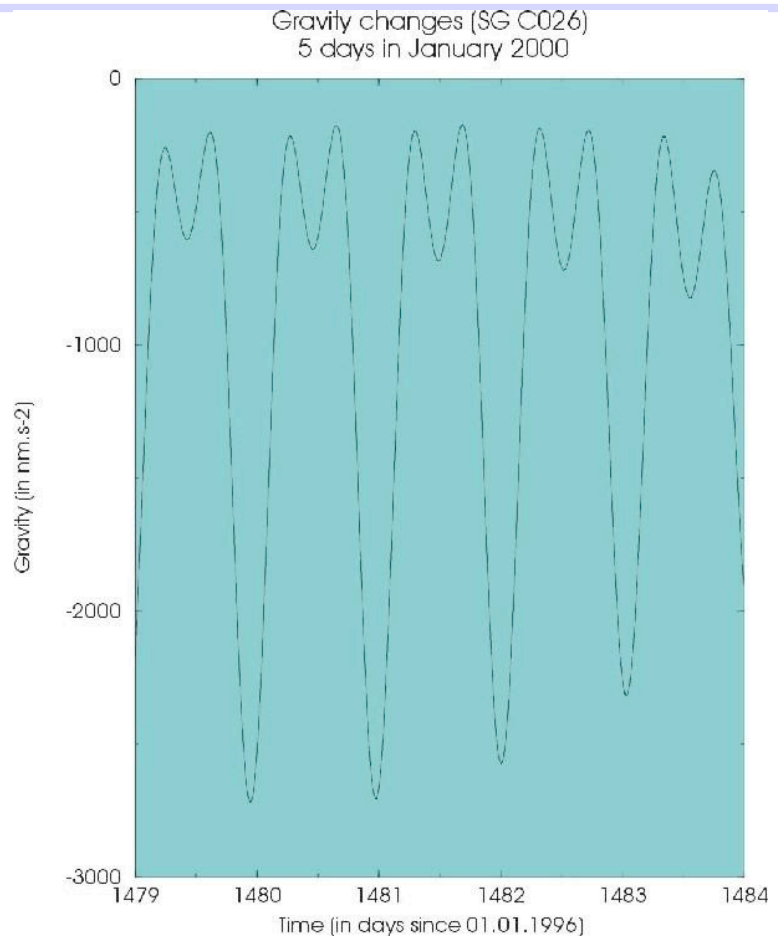
$$\phi_{grav} = \phi_0 + K(r)\phi_{Maree}$$

Le potentiel à la surface de la Terre devient donc

$$\begin{aligned} \phi_{grav}(a) &= \phi_0(a) + u(a) \frac{d\phi_0}{dr} + K(a)\phi_{Maree} \\ \phi_{grav.}(a) &= \phi_0(a) + (K(a) - H(a))\phi_{Maree} \end{aligned}$$

ou on utilise  $\frac{d\phi_0}{dr} = g$ . Le potentiel complet à la surface est donc maintenant

$$\phi_{total}(a) = \phi_0(a) + (1 + K(a) - H(a))\phi_{Maree}$$



# Rappel: Trajectoire des planètes

Il est donc nécessaire au premier abord de simplifier notre problème. La première façon de faire est de négliger, pour une planète donnée, l'action de toutes les autres planètes et de ne supposer que celle du soleil. Si l'on a plutôt un système Terre-Lune, Pluton-Charon, on fait la même chose, mais en considérant la trajectoire du centre de masse du système planète+satellites. Cette approximation est l'approximation Keplerienne.

On considère donc le soleil, de masse  $M$  et notre planète de masse  $m$ , toutes les deux ponctuelles. La force de gravitation peut alors s'écrire

$$\mathbf{f} = -G \frac{M m \mathbf{u}}{r^2} \quad (1)$$

où  $G$  est la constante d'attraction universelle:  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m Kg}^{-2}$ ,  $M$  et  $m$  les masses des deux corps,  $r$  leur distance et  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire les reliant. Si on applique la relation de la dynamique à la masse  $m$ , symbolisée par le point  $P$ , on a alors l'équation suivante:

$$m \frac{d^2 \mathbf{OP}}{dt^2} = -GM m \frac{\mathbf{MP}}{|\mathbf{PM}|^3} \quad (2)$$

On peut résoudre cette équation en remarquant que

$$\mathbf{r} = \frac{M}{M+m} \mathbf{OP} \quad (3)$$

où  $\mathbf{r} = \mathbf{MP}$ . Cette équation conduit, en remarquant que le point  $O$ , centre de gravité du système, est immobile ou animé d'une vitesse constante, à l'équation

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -GM m \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4)$$

où  $\mu = \frac{mM}{M+m}$  est la masse réduite du système à deux corps. Pratiquement, cette masse est dans le cas des trajectoires de planètes autour du soleil, presque égale

à la masse du soleil et le barycentre  $O$  est presque confondu avec le centre du soleil. Pour le couple Terre-Lune par contre, la masse de la Terre n'est que 80 fois plus grande que celle de la Lune, de sorte que compte tenu de la distance entre la Terre et la Lune, le barycentre du système Terre-Lune se trouve en un point proche de la surface de la Terre. Dans l'équation (3), tout se passe alors comme si la masse  $M$  est immobile mais qu'elle agissait avec la masse  $m+M$ . Quelle est l'évolution du moment cinétique de la planète  $P$ ? On peut simplement écrire ce moment cinétique:

$$\mathcal{L} = \mathbf{OP} \times m \partial_t \mathbf{u} \quad (5)$$

et l'on s'aperçoit simplement à partir de l'équation (3) que ce moment cinétique est constant, la force étant appliquée parallèlement au rayon  $\mathbf{OP}$ . On dit que la force est centrale.

On peut continuer à faire une analyse en temps de l'équation différentielle. En fait, il est plus intéressant d'étudier la trajectoire, et pour cela de passer en coordonnées polaires. Dans ces coordonnées, nous avons:

$$\mathbf{OP} = r \mathbf{e}_r, \quad (6)$$

$$\partial_t \mathbf{OP} = \dot{r} \mathbf{e}_r - r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (7)$$

Ces deux premières relations permettent d'expliciter le moment cinétique de la planète:

$$\mathbf{L} = \mathbf{OP} \times m \partial_t \mathbf{OP} \quad (8)$$

$$= -r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z = -m C \mathbf{e}_z \quad (9)$$

Dans cette relation,  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$  forment un trièdre direct et  $C = r^2 \dot{\theta}$ , comme le moment cinétique est indépendant du temps, est constant. Cette constante s'appelle la constante des aires. En effet, à cause des propriétés du produit vectoriel,  $\frac{C}{2}$  correspond à deux fois l'aire balayée par la planète durant l'unité de temps, et correspond donc à la vitesse areolaire. Il est possible alors d'utiliser  $C$  pour exprimer vitesse et accélération en fonction des dérivées non pas par rapport au temps, mais par rapport à la variable  $\theta$ . On obtient alors:

$$\mathbf{OP} = r \mathbf{u}, \quad (10)$$

$$\partial_t \mathbf{OP} = C [\mathbf{u} \mathbf{e}_\theta - \partial_\theta \mathbf{u} \mathbf{e}_r] \quad (11)$$

$$\partial_t^2 \mathbf{OP} = -C^2 u^2 [\mathbf{u} + \partial_\theta^2 \mathbf{u}] \mathbf{e}_r \quad (12)$$

où  $u = 1/r$ . Ces relations forment les deux relations de Binet. On peut maintenant exprimer l'équation différentielle de la trajectoire de la planète, qui est finalement donnée par

$$\mu C^2 u^2 [\mathbf{u} + \partial_\theta^2 \mathbf{u}] = G M M u^2 \quad (13)$$

d'o l'équation finale de la trajectoire

$$\partial_{\theta}^2 u + u = \frac{\mathcal{G}(M+m)}{C^2} \quad (14)$$

L'intégration de cette équation donne

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)] \quad (15)$$

C'est l'équation d'une conique de foyer M, d'excentricité  $e$ , de paramètre  $p = \frac{C^2}{\mathcal{G}(M+m)}$ .  $\theta_0$  est l'argument du périastre de la trajectoire. Lorsque l'excentricité  $e$  est inférieure à 1, il s'agit d'une ellipse et si  $e = 0$ , il s'agit d'un cercle. Dans le cas où  $e = 1$ , nous avons une parabole et pour  $e > 1$  une hyperbole. On peut réécrire la relation sous la forme

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (16)$$

Cette trajectoire est donc définie avec les paramètres suivant: • le demi-grand axe  $a$  ;

- l'excentricité  $e$  .

Remarque: l'excentricité est reliée au demi petit axe par la relation  $e = c/a$ , où  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Il faut aussi définir le plan sur lequel se déroule la trajectoire. Ceci est fait avec les paramètres:

- l'argument  $\theta_0$  du périhélie ou périastre;

et le plan sur lequel cette trajectoire est inscrite par les paramètres:

- l'inclinaison  $i$  du plan de l'orbite par rapport à un plan de référence (plan de l'écliptique pour les planètes, par définition le plan de l'orbite terrestre ou le plan équatorial de la planète pour les satellites) • la longitude  $\Omega$  du noeud ascendant ( qui est l'intersection entre la trajectoire de la planète et le plan de référence, balayé du sud vers le nord).

Pour une trajectoire elliptique, le point le plus proche du foyer est le périhélie de l'orbite, le point le plus lointain est l'apogée, tandis que la distance entre le centre de l'ellipse et son foyer est  $ae$ . La quasi totalité des planètes du système solaire ont une excentricité proche de 0 et donc une trajectoire quasi circulaire. Il y a quelques exceptions, en particulier Mercure et Pluton, qui ont une excentricité de 0.206 et 0.246. Dans le cas de Pluton, ceci signifie la dis entre le soleil et Pluton varie entre 29.70 UA et 48.96 UA. Le demi grand axe de Neptune étant de 30.109, et son excentricité presque nulle ( $e=0.009$ ) ceci signifie que Neptune est parfois la planète la plus éloignée du Soleil. Certaines comètes ainsi que les astéroïdes ont des trajectoires elliptiques. Parmi les objets ayant une trajectoire très elliptique, on rencontre les astéroïdes Apollo-Amor. Ces astéroïdes ont des aphélies presque tous situés entre les orbites de Mars et de Jupiter, et pour beaucoup ont un périhélie inférieur à une UA Leur trajectoire coupe donc celle de la Terre, et mme celles de Venus et de Mercure. L'astéroïde

1566 Icare approche par exemple le soleil à 0.19 UA et s'en éloigne à 1.19, tandis que 1978 SB s'en approche à 0.35 UA pour s'en éloigner à 4.11 UA, ce qui correspond à des trajectoires d'excentricité de 0.85. Ce sont ces objets qui ont donné naissance aux cratères de plus de cinq kilomètres qui existent sur la Terre, sur la Lune, Mercure et peut tre Mars, et qui sont utilisés comme chronomètres chronologiques pour déterminer les ages des surfaces de ces planètes. On estime par exemple que près de 400 tonnes de fragments d'objets Amor-Apollo, pesant entre 100g et une tonne doivent rentrer chaque année dans l'atmosphère de la Terre. De plus, pour un objet Apollo donné, la probabilité de collision est de l'ordre de  $5 \times 10^{-9}$  par an, ce qui donne environ une collision toute les 200 millions d'année. Si on suppose qu'il y a environ entre 750 et 1000 objets Apollo, la probabilité de collision serait donc environ de une collision tous les millions d'années. La quasi-totalité des fragments de météorites sont ainsi des restes d'objets Apollo-Amor

Pour une trajectoire parabolique, caractérise également la trajectoire avec:

- la distance périhélique  $q = a(1-e)$
- la distance aphélie  $Q = a(1+e)$  . Les comètes non-périodiques sont des objets avec une trajectoire quasi-parabolique, qui semblent venir d'un réservoir appelé "nuage d'Oort" a quelques dizaines de millier d'UA.

## 2.3 les lois de Kepler

La demarche que nous venons d'effectuer est l'inverse du cheminement historique des idées. En effet, à partir des observations de Ticho-Brahé, Kepler fit une synthèse des observations sous la forme de trois lois:

- La trajectoire des planètes est une ellipse dont le centre du soleil est l'un des foyers
- Au cours du mouvement, le rayon vecteur joignant le centre du soleil à la planète décrit des aires égales en des temps égaux: c est la loi des aires
- le rapport des carrés des périodes sur les cubes des demi grands axes est une constante. Exprimé avec  $a$  en UA et T en années, ceci donne:

$$\frac{T^2}{a^3} = 1 \quad (17)$$

On peut redémontrer la troisième relation à partir de nos résultats.

# Equation de la trajectoire

## Potentiel et attraction de la planète déformée sur le Satellite

$$\phi_{gravi} = -u_d g k_2 \left( \frac{a}{D} \right)^3 P_2(\cos \theta)$$

par continuité et en raison de  $n=2$  et où

$$u_0 = \frac{a^2 G m_s}{g D^3}$$

## Conservation du moment cinétique

$$L = I\Omega + \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} D^2 n$$

d'où

$$\dot{L} = 0 = I\dot{\Omega} + \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} \frac{d}{dt}(D^2 n) = I\dot{\Omega} + \frac{1}{2} \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} D \dot{D} n$$

en utilisant la 3eme relation de Kepler

$$n^2 D^3 = G(m_p + m_s)$$

## Evolution du moment cinétique

$$m_s D^2 \frac{dn}{dt} = \Gamma = \left| \vec{r} \times \vec{F} \right| = -m_s D \frac{1}{D} \frac{\partial \phi_{gravi}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\varepsilon} = \frac{3}{2} k_2 \frac{G m_s^2}{D^6} a^5$$

# Evolution

## Evolution de l'énergie mécanique

$$E = \frac{1}{2} I \Omega^2 - G \frac{m_p m_s}{2D}$$

d'où

$$\dot{E} = I \Omega \dot{\Omega} + G \frac{m_p m_s}{2D^2} \dot{D} = - \frac{1}{2} \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} n D \dot{D} (\Omega - n)$$

$$E = \frac{1}{2} I \Omega^2 - G \frac{m_p m_s}{2D}$$

Comme il y a perte d'énergie par frottement de marée, on a donc

$$\text{signe}(\dot{D}) = \text{signe}(\Omega - n)$$

- les satellites sur des orbites progrades plus loin que l'orbite planéto-synchrone vont s'éloigner
- les satellites sur des orbites progrades plus loins que l'orbite planeto-synchrone vont se rapprocher
- les satellites sur des orbites retrogrades vont se rapprocher.

### • Evolution de la trajectoire

Comme

$$\dot{E} = -\Gamma(\Omega - n)$$

nous avons

$$\dot{D} = \text{signe}(\Omega - n) 3k_2 \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{a}{D} \right)^5 n D \sin(2\varepsilon) = \text{signe}(\Omega - n) 3k_2 \frac{m_s}{m_p} a^5 \frac{\sqrt{G(m_s + m_p)}}{Q_p D^{11/2}}$$

Pour la Terre,  $2\varepsilon = 1/350 = 1/Q_p$  et  $da/dt = 10^{-9} \text{ms}^{-1}$

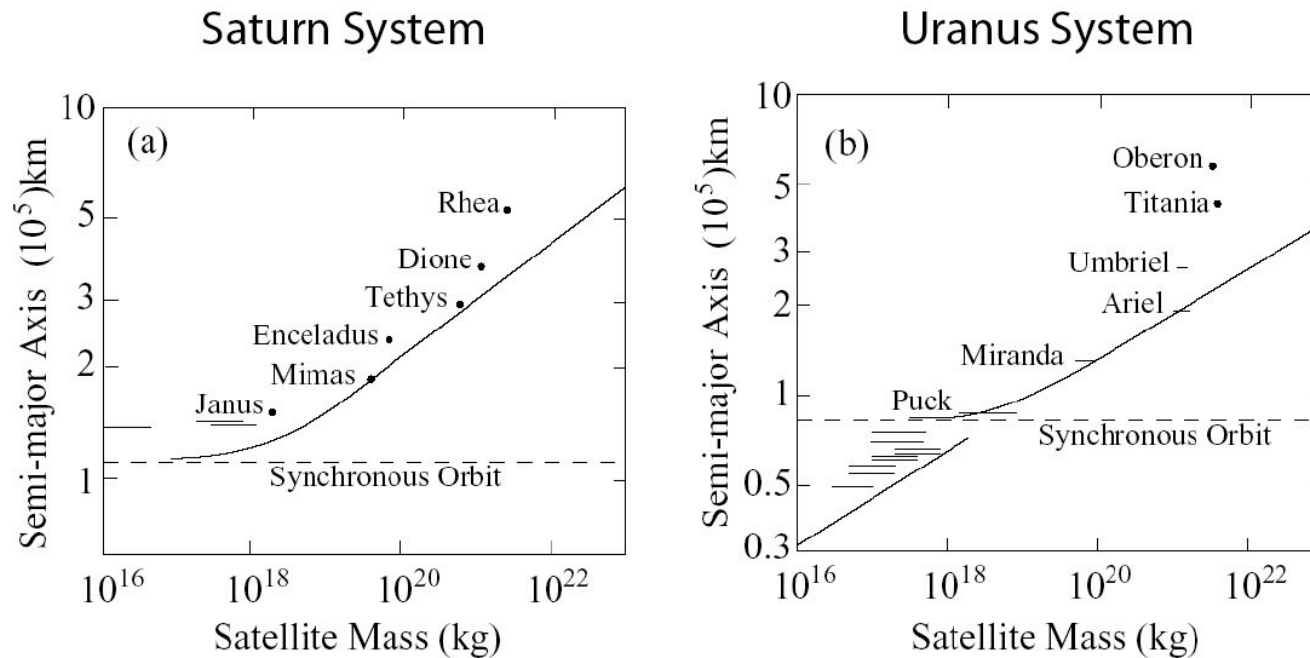
# Evolution

L'intégration de l'équation donne alors, pour un satellite au cours du temps

$$\frac{2}{13} a_0^{13/2} \left( 1 - \left( \frac{a_i}{a_0} \right)^{13/2} \right) \approx \frac{2}{13} a_0^{13/2} = \frac{3k_2}{Q_p} \frac{m_s}{m_p} a^5 \sqrt{G(m_s + m_p)} t$$

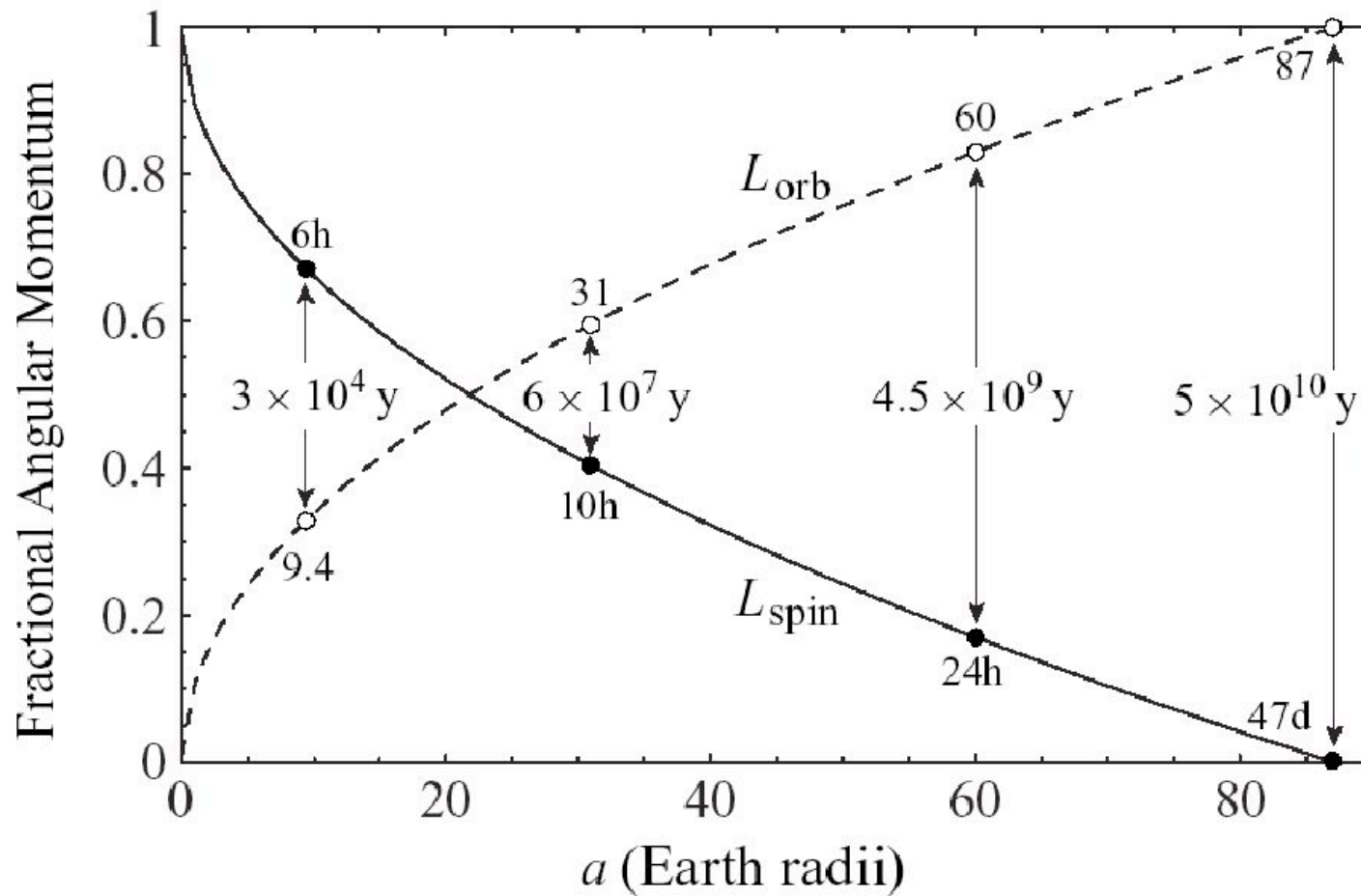
Pour un instant donné et plusieurs satellites, nous avons par contre :

$$\log a_0 = \frac{2}{13} \log m_s + cte$$

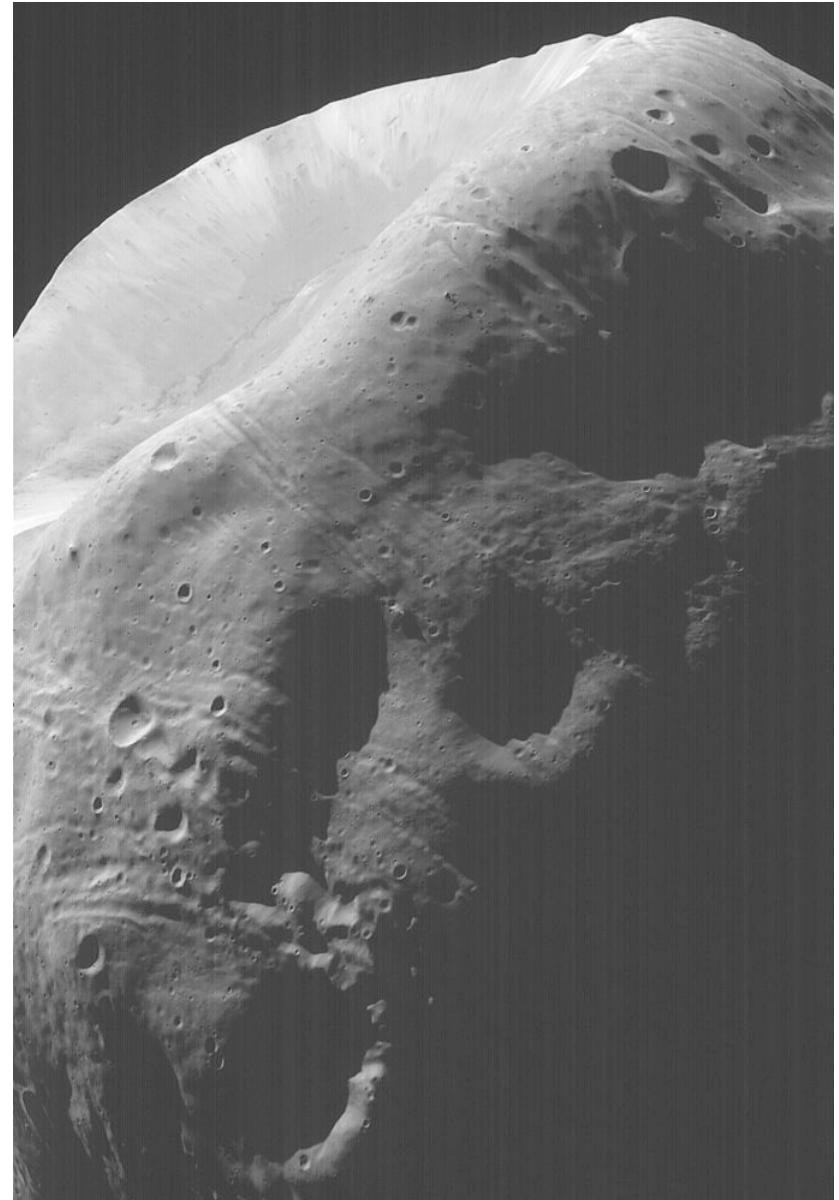
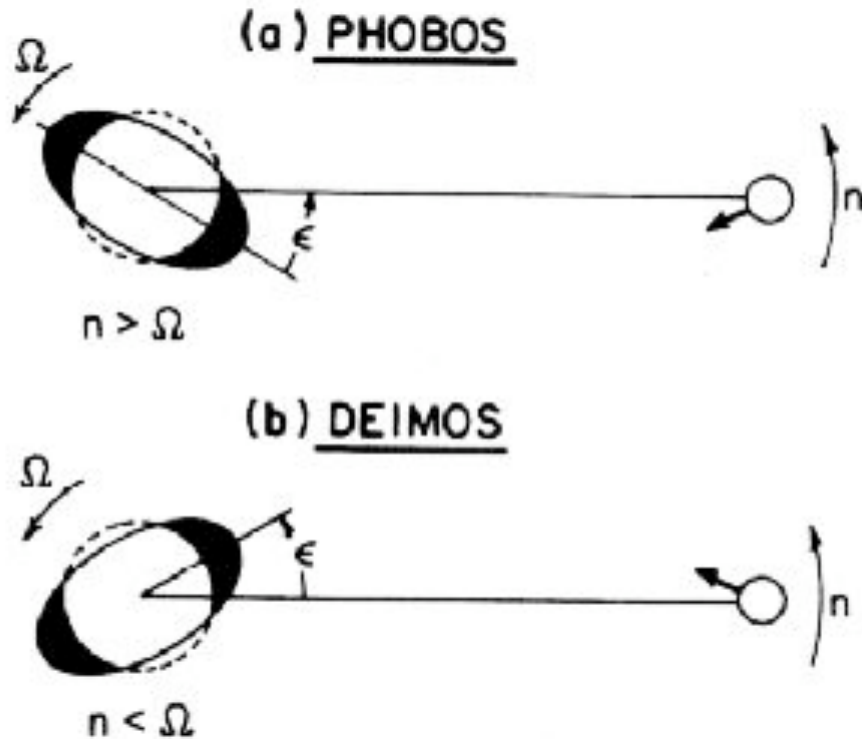




# Evolution lunaire



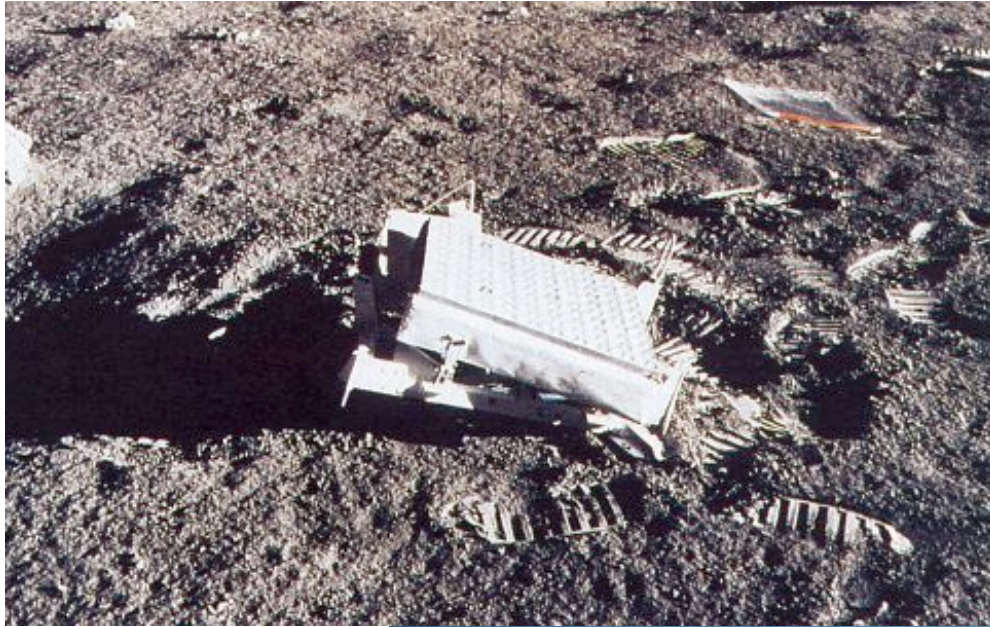
# Accélération séculaire de Phobos



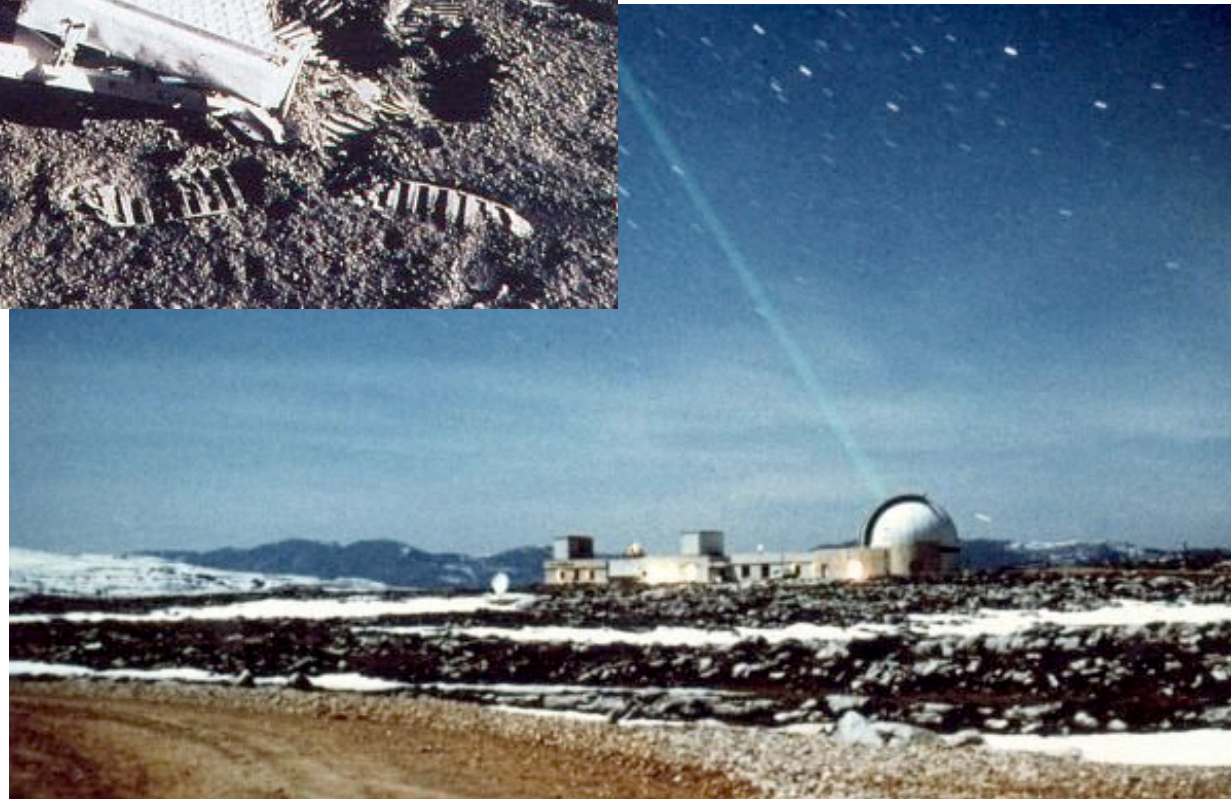
- éloignement lent de Deimos
- chute de Phobos d'ici 20-30 millions d'années

# Mesure pour la Lune

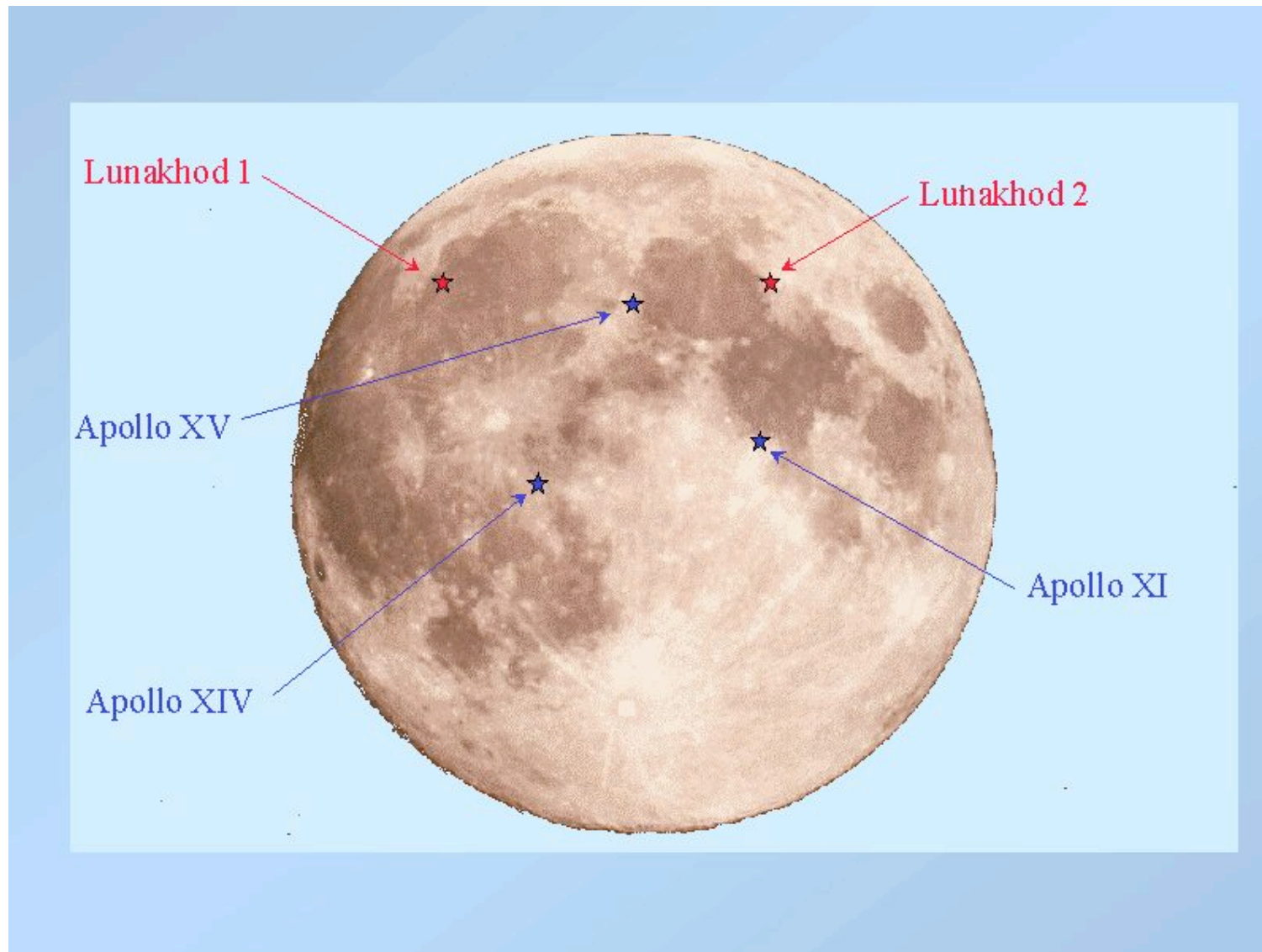
---



- $C/Ma2 = 0.3932 \pm 0.0002$



# Position des réflecteurs sur la Lune



# Interpretation

$$I = \int dV \rho d^2 \approx \frac{2}{3} \int dV \rho r^2$$

Cas homogène

$$\frac{I}{Ma^2} = 0.4$$

$$-\frac{dP}{dr} + \rho g = 0$$

$$M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho r^3$$

$$g = -G \frac{M(r)}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3} \rho r$$

d'où

$$P = P_s + \frac{2\pi G}{3} \rho^2 (a^2 - r^2)$$

Cas compressible

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \vec{0}$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$$

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho$$

d'où, si  $K=K_0+bp$  ( $K_0=1.5 \cdot 10^{11}$  Pa,  $b=8$ )

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + \frac{\xi}{a^2} (a^2 - r^2) - \frac{\eta}{a^4} (a^2 - r^2)^2 \right]$$

avec

$$\xi = \frac{2\pi}{3} \frac{G \rho_0^2 a^2}{K_0}, \eta = \frac{2\pi^2}{9} \frac{b G^2 \rho_0^4 a^4}{K_0^2} = \frac{1}{2} b \xi^2$$

et

$$M = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_0 \left( 1 + \frac{2}{5} \xi - \frac{8}{35} \eta \right), I = \frac{8\pi}{15} a^5 \rho_0 \left( 1 + \frac{2}{7} \xi - \frac{8}{63} \eta \right)$$

$$\frac{I}{Ma^2}$$

$$= 0.4 \left[ 1 - \frac{4}{35} \xi + \frac{8}{1575} (9 + 10b) \xi^2 \right]$$

$$= 0.3986$$

# Lune ....

- Nécessité de réduire encore le moment d'inertie par des gradients de densité avec la profondeur
  - Croûte ( $2900\text{-}3000\text{ kg/m}^3$ , 40-70 km)
  - Noyau ( $4000\text{-}8000\text{ kg/m}^3$ , 300-500 km)
- Mais indétermination forte ( 2 données, 5 paramètres pour un modèle à trois couches..)

