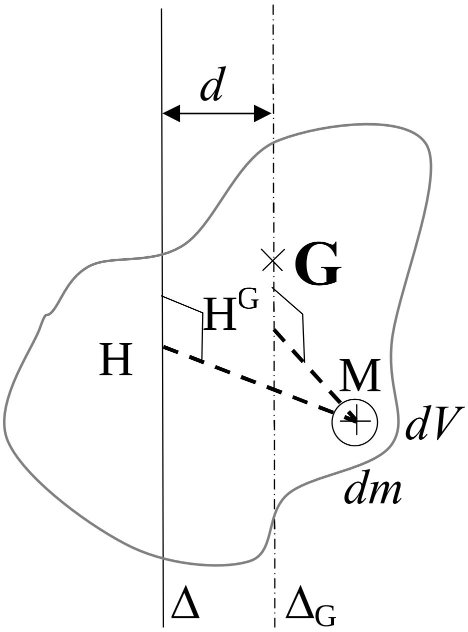
Licence STEP L2 Module Physique pour les géosciences S4

Mécanique des solides et des planètes

MS3: Exercices du 12 février 2007

2007MS3E1 :

Refaisons la démonstration du chapitre 2 pages 22-23 dans le cas d'un solide continu de masse M et de répartition de masse volumique ρ. Cette masse volumique ρ dans le cas général sera une fonction des coordonnées x, y, z (voire même du temps). Considérons le moment I_Δ par rapport à un axe quelconque Δ et le moment d'inertie $I_{\Delta G}$ par rapport à l'axe Δ_G parallèle à Δ passant par G. Soit d la distance entre ces deux axes.



On a :

$$I_\Delta = \int \rho r_\Delta^{\,2} dV \,, \tag{1}$$

et

$$I_{\Delta G} = \int \rho r_\Delta^{G2} dV \,, \tag{2}$$

où r_Δ et r_Δ^G désignent la distance entre le point M et les axes Δ et Δ_G respectivement.

Soit H la projection de M sur Δ, et H^G sa projection sur Δ_G. On a $r_\Delta = \left|\overrightarrow{MH}\right|$ et $r_\Delta^G = \left|\overrightarrow{MH^G}\right|$. On remarque que, pour tout point M du solide, tous les vecteurs $\overrightarrow{HH^G}$ sont identiques au vecteur $\vec{d}$ perpendiculaire aux deux axes et contenu dans le plan les contenant.

Développons alors la distance r_Δ :

$$r_\Delta^{\,2} = \overrightarrow{HM}^2 = \left(\overrightarrow{HH^G} + \overrightarrow{H^G M}\right)^2 = r_\Delta^{G2} + d^2 + 2\vec{d}\cdot\overrightarrow{H^G M} \,. \tag{3}$$

On a donc :

$$I_\Delta = I_{\Delta G} + Md^2 + 2\vec{d}\cdot\int \rho \overrightarrow{H^G M} dV \,. \tag{4}$$

Dans le premier terme, on a effectivement reconnu $I_{\Delta G}$; quant au troisième terme, il est nul. En effet, faisons apparaître le centre d'inertie G du solide :

$$\vec{d}\cdot\int\rho\overrightarrow{H^G M}dV=\vec{d}\cdot\int\rho\overrightarrow{H^G G}dV+\vec{d}\cdot\int\rho\overrightarrow{GM}dV\ . \qquad (5)$$

où le premier terme est nul car tous les vecteurs $\overrightarrow{H^G G}$ sont alignés avec l'axe Δ_G et donc sont perpendiculaire à $\vec{d}$, et le deuxième terme est nul par définition du centre d'inertie.

On a ainsi démontré la règle de Steiner-Huygens :

$$I_\Delta=I_{\Delta G}+Md^2\ . \qquad (6)$$

2007MS3E2 :

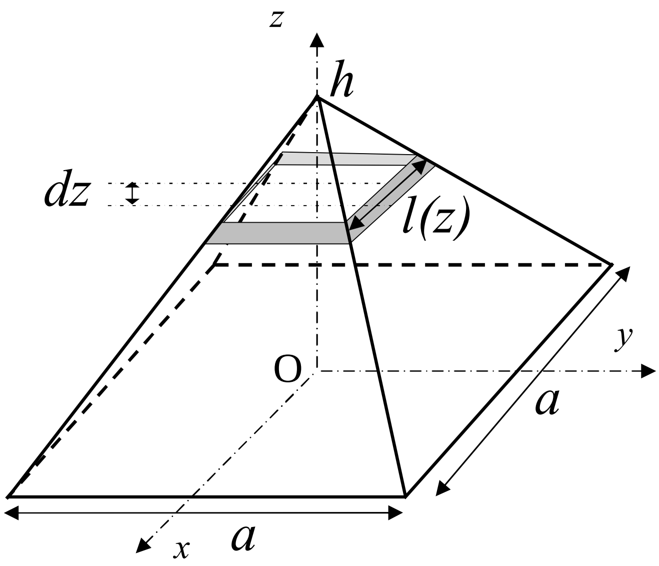
La position du centre d'inertie G de la pyramide est donnée par :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{M}\int\rho\overrightarrow{OM}dV\ , \qquad (7)$$

où M et ρ sont respectivement sa masse et sa masse volumique. Comme la pyramide est homogène, on a :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{V}\int\overrightarrow{OM}dV\ , \qquad (8)$$

où V est le volume de la pyramide.



Soit a le côté de la base de la pyramide et h sa hauteur. Par symétrie, on peut affirmer que le centre d'inertie G se trouve sur l'axe vertical Oz de la pyramide. Reste à trouver sa position z_G. Pour cela, découpons la pyramide en petites tranches d'épaisseur dz entre z et $z+dz$ parallèles au plan horizontal Oxy. Chaque tranche est un carré de côté $l(z)=(h-z)a/h$. On a donc :

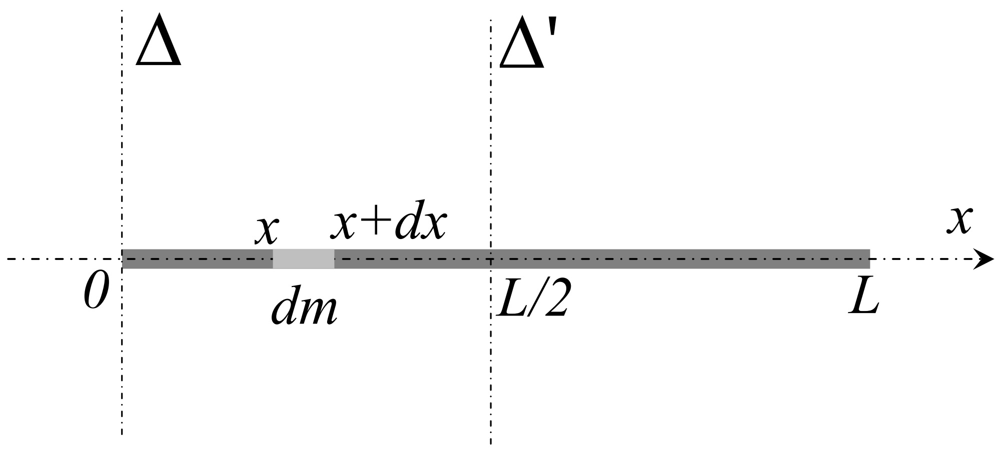
$$z_G=\frac{1}{V}\int_0^h z\left((h-z)\frac{z}{h}\right)^2dz=\frac{\int_0^h z\left((h-z)\frac{a}{h}\right)^2dz}{\int_0^h\left((h-z)\frac{a}{h}\right)^2dz}=h\frac{\int_0^1 u(1-u)^2dz}{\int_0^1(1-u)^2dz}\ , \qquad (9)$$

où $u=z/h$. La suite n'est qu'un calcul :

$$z_G = h\frac{\int_0^1 (1-u)^2 u dz}{\int_0^1 (1-u)^2 dz} = h\frac{\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-2\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = h\frac{\frac{6-8+3}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{h}{4}. \tag{10}$$

2007MS3E3 :

Soit L la longueur de la barre fine et M sa masse. Plaçons-nous par rapport à un axe Δ perpendiculaire à la barre et passant par une extrémité. Soit x la coordonnée le long de la barre qu'on découpe en petites rondelles de longueur dx entre x et $x+dx$. La masse de cette rondelle est $dm=mdx/L$.



Le moment d'inertie I par rapport à l'axe Δ est :

$$I = \int_0^L x^2 dm = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L}\frac{1}{3}L^3 = \frac{1}{3}ML^2 . \tag{11}$$

Soit J le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ' parallèle à Δ passant par le centre de la barre. Il est égal à deux fois le moment d'inertie par rapport à une extrémité (calcul précédent) d'une barre de longueur L/2! On a donc :

$$J = 2\frac{1}{3}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 . \tag{12}$$

Calculons $J+Md^2$ où d est la distance entre nos deux axes :

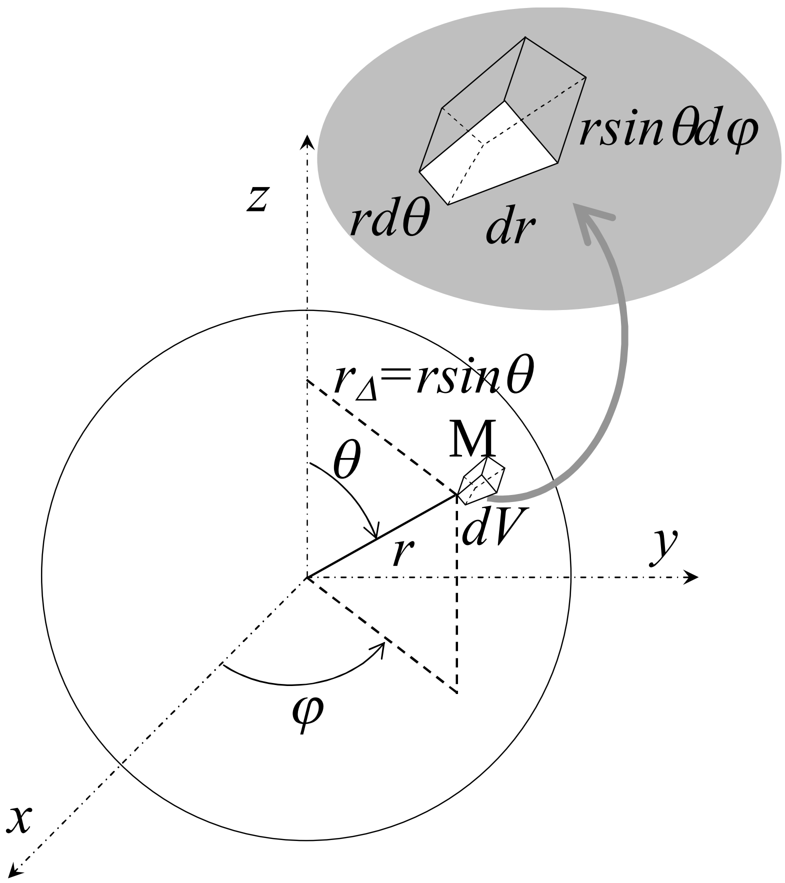
$$J + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 = I . \tag{13}$$

On retrouve bien la règle de Steiner-Huygens.

2007MS3E4 :

Soit une sphère homogène de rayon R et de masse M. Sa masse volumique est :

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} . \tag{14}$$



Plaçons-nous tout d'abord en coordonnées sphériques $r,\ \theta,\ \varphi$ et calculons le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical Oz. La distance à l'axe OZ est $r_\Delta = r\sin\theta$. Un petit élément de volume $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ contient une petit mase $dm = \rho dV$. On a alors :

$$I_\Delta = \int \rho r_\Delta{}^2 dV = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\theta\, r^2 \sin\theta\ dr d\theta d\varphi \quad . \tag{15}$$

Chaque intégrale dans cette intégrale multiple ne dépend que d'une seule variable et donc on peut la séparer en un produit de trois intégrales :

$$I_\Delta = \rho \left[\int_0^R r^4 dr \right] \left[\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \right] \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \right] . \tag{16}$$

Calculons séparément la deuxième intégrale :

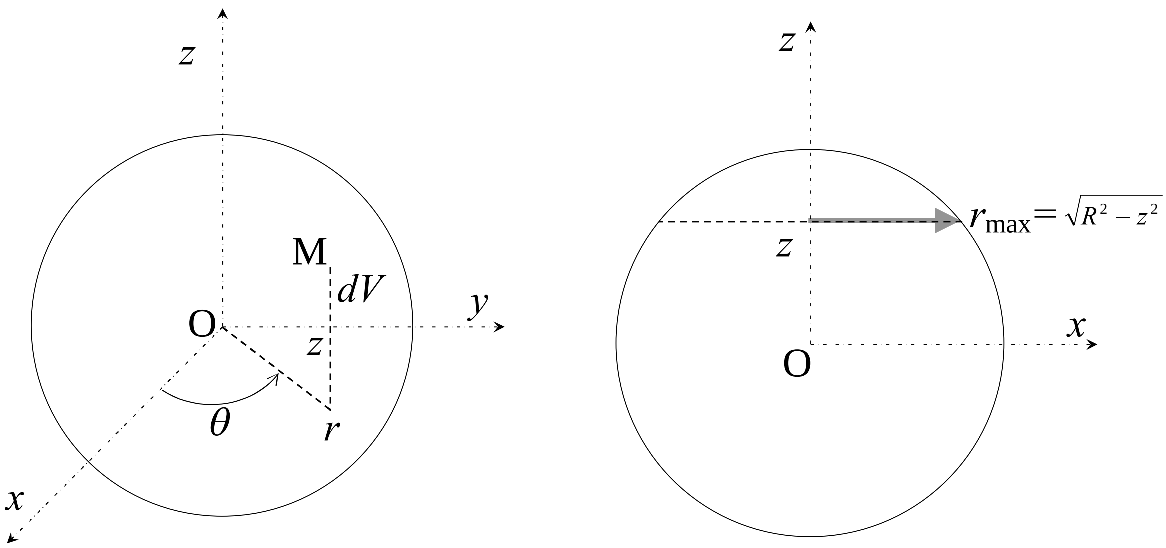
$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = -\int_1^{-1} \left[1-u^2\right] du = \int_{-1}^1 \left[1-u^2\right] du = 2\int_0^1 \left[1-u^2\right] du = 2\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3} . \tag{17}$$

On a donc :

$$I_\Delta = \frac{3M}{4\pi R^3} \times \frac{R^5}{5} \times \frac{4}{3} \times 2\pi = \frac{2}{5} MR^2 . \tag{18}$$

Plaçons-nous maintenant en coordonnées cylindriques $r,\ \theta,\ z$. Les coordonnées $r,\ \theta$ sont maintenant définies dans le plan horizontal Oxy. La distance à l'axe OZ est maintenant tout simplement r et le petit élément de volume s'écrit $dV = r dr d\theta dz$. Le moment d'inertie par rapport à z devient :

$$I_\Delta = \int \rho r^2 dV = \rho \int_{-R}^{R} dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dr \int_0^{2\pi} r^2\ r d\theta \quad . \tag{19}$$



Dans l'écriture de l'intégrale (19), on a bien pris garde aux bornes. Pour un z donné, en effet, le rayon r varie entre $-r_{max}$ et $r_{max}=\sqrt{R^2-z^2}$ (voir figure ci-dessus à droite). L'intégration sur l'angle, par contre, se sépare. On a donc :

$$I_\Delta = \rho\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_{-R}^{R} dz\left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3\,dr\right)\right] . \qquad (20)$$

On a :

$$\int_{-R}^{R} dz\left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3\,dr\right) = \int_{-R}^{R} dz\left(\frac{\left(R^2-z^2\right)^2}{4}\right) = \frac{1}{2}\int_0^R dz\left[R^4-2R^2z^2+z^4\right] = \frac{R^5}{2}\left[1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right] = \frac{4R^5}{15} \qquad (21)$$

et on obtient :

$$I_\Delta = \frac{3M}{4\pi R^3}\times 2\pi\times\frac{4R^5}{15} = \frac{2}{5}MR^2 . \qquad (22)$$

On retrouve le même résultat que précédemment en coordonnées sphériques. C'est heureux!

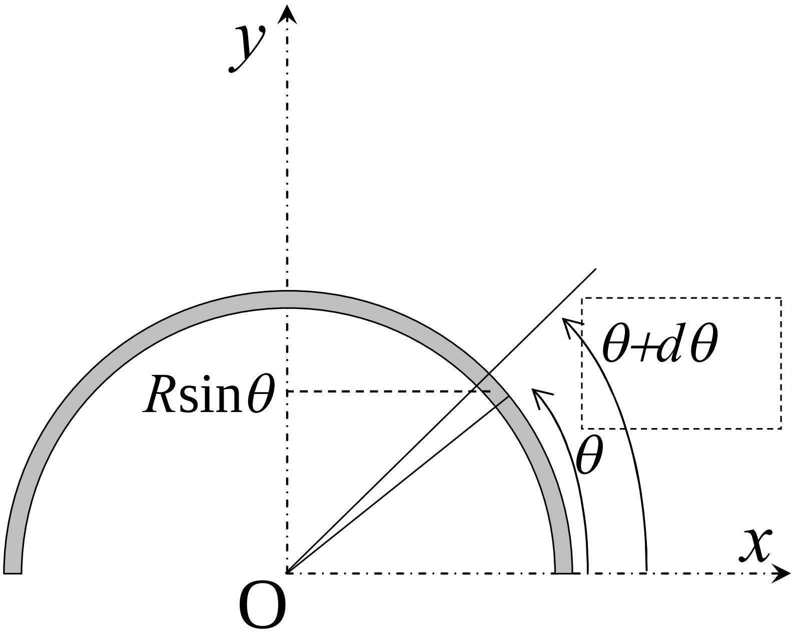
2007MS3E1C :

Par symétrie, le centre d'inertie du demi-cerceau est sur l'axe Oy de son plan perpendiculaire à sa base et passant par son milieu. La position y_G du centre d'inertie sur cet axe vérifie :

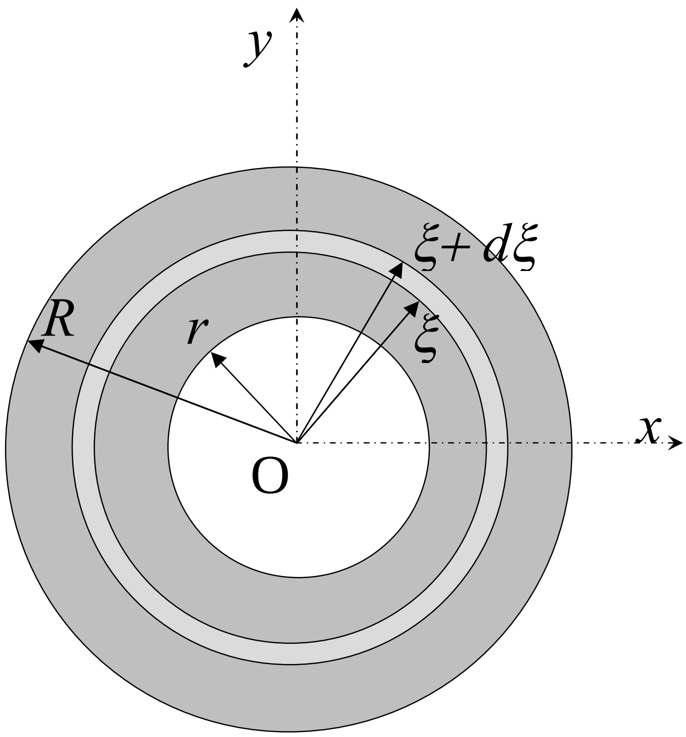
$$y_G = \frac{1}{M}\int y\,dm . \qquad (23)$$

où M est la masse du cerceau. Découpons notre cerceau en petits secteurs d'angle $d\theta$. Comme le cerceau est homogène, chaque petit bout de cerceau contient une petite masse $dm=Md\theta/\pi$. D'autre part, la coordonnée y de chaque point du cerceau s'écrit $R\sin\theta$, R étant le rayon du cerceau. On a donc :

$$y_G = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} R\sin\theta\,\frac{Md\theta}{\pi} = \frac{2}{\pi}R . \qquad (24)$$



2007MS3E2C :



Soit e l'épaisseur de notre roue homogène. Sa masse volumique est :

$$\rho = \frac{M}{\pi(R^2 - r^2)e} \,. \tag{25}$$

Pur calculer le moment d'inertie I par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de la roue passant par son centre, découpons notre roue en petits anneaux élémentaires situés entre ξ et $\xi+d\xi$. Le petit volume dV délimité par ces anneaux est $2\pi\xi d\xi$. On a alors :

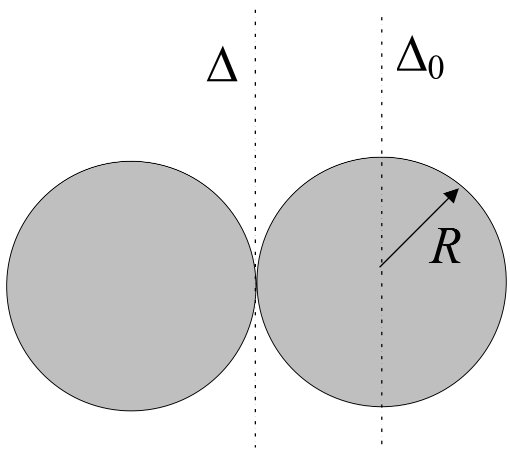
$$I = \int \rho r^2 dV = \rho \int_r^R \xi^2 2\pi e \xi\, d\xi = \frac{M}{\pi(R^2 - r^2)e} 2\pi e \int_r^R \xi^3\, d\xi = \frac{M}{(R^2 - r^2)} \frac{R^4 - r^4}{2} \qquad (26)$$

d'où :

$$I = \frac{1}{2} M\left(R^2 + r^2\right). \qquad (27)$$

On retrouve bien le moment d'inertie du cylindre homogène par rapport à son axe $1/2MR^2$ pour r=0.

2007MS3E3C :



Soit M la masse du système et R le rayon des sphères. On connaît le moment d'inertie I_0 d'une sphère par rapport à l'axe Δ_0 passant par le centre :

$$I_0 = \frac{2}{5} \frac{M}{2} R^2 = \frac{MR^2}{5}. \qquad (28)$$

Le moment d'inertie J par rapport à l'axe Δ situé à une distance R de Δ_0 est obtenu en utilisant la règle de Steiner-Huygens :

$$J = I_0 + \frac{M}{2} R^2 = \frac{1}{5} MR^2 + \frac{1}{2} MR^2 = \frac{7}{10} MR^2. \qquad (29)$$

Comme nous avons deux sphères, le moment d'inertie I du système par rapport à Δ est :

$$I = \frac{7}{5} MR^2. \qquad (30)$$

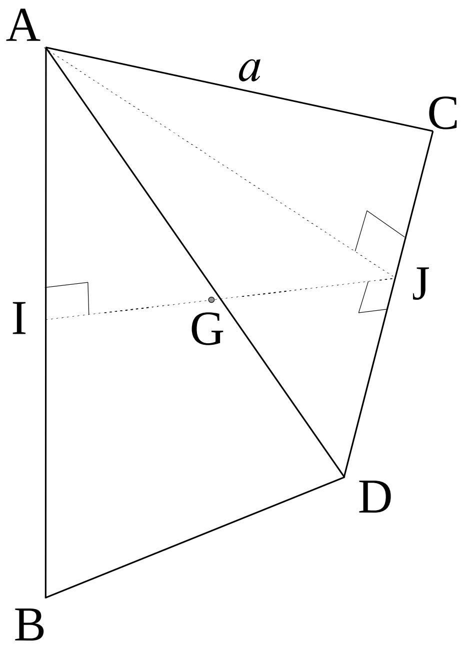
2007MS3E4C :

Considérons un tétraèdre régulier ABCD de côté a (voir figure). Par symétrie, on peut affirmer que le centre d'inertie se trouve sur la ligne IJ joignant les milieux de deux arêtes AB et CD opposées. Comme ces deux arêtes opposées sont symétriques, le centre d'inertie doit se trouver à égale distance x_G de chaque arête. Il se trouve donc au milieu de IJ. Il est aisé de calculer IJ. En effet, on a (théorème de Pythagore) :

$$IJ = \sqrt{AJ^2 - AI^2}. \qquad (31)$$

Or, AJ=$a\sqrt{3}/2$ et AI=a/2. On a donc :

$$x_G = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{a}{2\sqrt{2}}}\ . \tag{32}$$



2007MS3E5C :

Considérons un triangle ABC formé de trois barres minces et soit IJK le triangle des milieux (voir figure). Comme les barres sont homogènes, on considérera dans le suite que les masses sont égales aux longueurs. Suspendons notre triangle par le milieu I de AB et soient α et β les angles de IK et IJ avec la verticale. Soient A', B', C', I', J', K' les projections de A, B, C, I, J, K sur la verticale passant par I. A l'équilibre, le moment du poids de la barre BC par rapport à I est égal et opposé à celui du poids de la barre AC. Ecrivons cette condition en comptant algébriquement les distances le long de l'axe horizontal du plan contenant le triangle:

$$\overline{J'J}\times BC + \overline{K'K}\times AC = 0\ . \tag{33}$$

Mais on a :

$$\overline{J'J} = \frac{1}{2}\left(\overline{C'C}+\overline{B'B}\right) \text{ et } \overline{K'K} = \frac{1}{2}\left(\overline{A'A}+\overline{C'C}\right). \tag{34}$$

Par ailleurs, les deux longueurs peuvent s'écrire :

$$BC = \frac{\overline{B'B}-\overline{C'C}}{\sin\alpha} \text{ et } AC = \frac{\overline{AA'}+\overline{C'C}}{\sin\beta}\ . \tag{35}$$

La condition (33) devient donc :

$$\frac{\overline{B'B}^2-\overline{C'C}^2}{\sin\alpha} - \frac{\overline{A'A}^2-\overline{C'C}^2}{\sin\beta} = 0\ . \tag{36}$$

Mais, comme BB'=AA', cette condition implique $\alpha = \beta$! La verticale est donc la bissectrice de KIJ. Ce raisonnement s'applique aux deux autres bissectrices. Le centre d'inertie se trouve donc sur chaque bissectrice du triangle des milieux, donc à leur intersection, qui est le centre du cercle inscrit à ce triangle! CDFD.