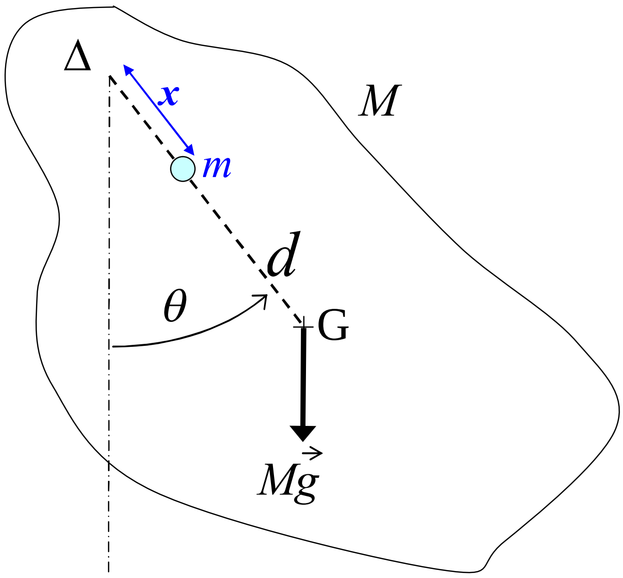
Mécanique des solides et des planètes

MS8: Exercices du 19 mars 2007

2007MS8E1 :



La période des petites oscillations du pendule physique de masse M est:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}\,. \tag{1}$$

Quand on ajoute la petite masse m, on obtient un nouveau pendule physique caractérisé par une masse $M'=M+m$, un moment d'inertie $J=I+mx^2$ et un centre d'inertie situé à une distance d' de l'axe Δ telle que $M'd'=Md+mx$. La période devient T' donnée par:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{M'gd'}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{I+mx^2}{g(Md+mx)}}}\,. \tag{2}$$

Expérimentalement, on connaît M, m, x; on peut mesurer T et T'. On peut donc écrire:

$$\begin{cases} \dfrac{T^2}{4\pi^2}gMd = I \\ \dfrac{T'^2}{4\pi^2}g(Md+mx) = I + mx^2 \end{cases}. \tag{3}$$

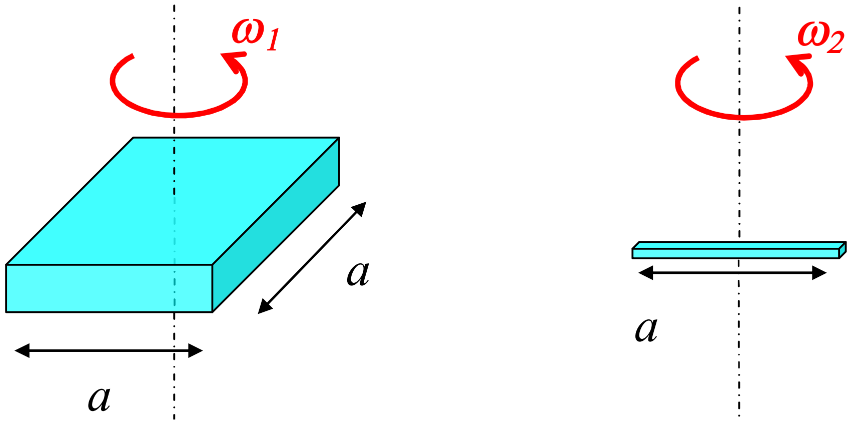
et éliminer d:

$$\frac{T'^2}{T^2}I + \frac{T'^2}{4\pi^2}gmx = I + mx^2\,, \tag{4}$$

$$\boxed{I = \frac{mx^2 - \dfrac{T'^2}{4\pi^2}gmx}{\dfrac{T'^2}{T^2} - 1}}\,. \tag{5}$$

On pourra faire la mesure de T' pour différentes valeurs de x et vérifier que le moment d'inertie I obtenu en appliquant (5) reste stable.

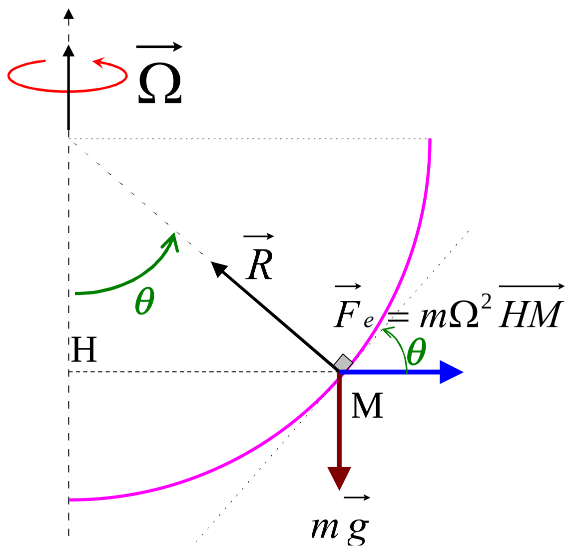
2007MS8E2 :



Le moment d'inertie d'une plaque carrée de masse M et d'arête a par rapport à un plan médian perpendiculaire à la plaque et parallèle à un côté est $I_{//}=Ma^2/12$. Le moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe perpendiculaire à la plaque passant par le centre d'inertie est la somme des moments d'inertie de deux plans perpendiculaires se coupant selon cet axe, soit $I_1=2I_{//}=Ma^2/6$.

Quand la plaque devient une barre fine, son moment d'inertie par rapport à l'axe devient $I_2=Ma^2/12$. Pendant cette transformation, le moment cinétique est conservé. On a donc $I_1\omega_1=I_2\omega_2$ ou ω_1 est la vitesse angulaire de rotation de la plaque et ω_2 celle de la barre fine. On a donc $\omega_2= \omega_1 I_1/I_2=2\omega_1$. La barre fine tourne deux fois plus vite que la plaque car son moment d'inertie par rapport à l'axe est deux fois plus petit!

2007MS8E3 :



A l'équilibre, la somme des forces agissant sur le mobile est nulle. Ces forces sont son poids, la force d'inertie d'entraînement, qui est horizontale, et la réaction du plan qui, en l'absence de frottement, est normale à la calotte sphérique. Projetons ces forces sur la droite d'intersection du plan vertical et du plan normal à la calotte sphérique. On a alors:

$$mg\sin\theta = F_e\cos\theta\,, \qquad (6)$$

où q est l'angle avec la verticale de la droite joignant le point de contact au centre de la sphère et F_e le module de la force d'inertie d'entraînement. On a:

$$F_e = m\Omega^2 HM = m\Omega^2 R\sin\theta \ . \tag{7}$$

En reportant dans (6), on obtient:

$$g = \Omega^2 R\cos\theta \ . \tag{8}$$

La position d'équilibre vérifie donc:

$$\cos\theta = \frac{g}{\Omega^2 R} \ . \tag{9}$$

Quand la vitesse angulaire devient très grande, l'angle tend vers 90°, le mobile se retrouve plaqué contre l'extérieur de la calotte sphérique.

2007MS8E4 :

Quand on va poser la toupie sur sa pointe, elle va effectuer un mouvement de précession dans le même sens que sa rotation propre, avec une vitesse angulaire donnée par (cf chapitre 5 équation 5.30):

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgd}{C\omega_Z} \ , \tag{10}$$

où M est sa masse, C son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation propre, ω_Z la vitesse de rotation propre et d la distance entre le point de contact et le contre d'inertie.

Utilisons les résultats de l'exercice MS4E4. On a:

$$d = \frac{3}{4}h \quad \text{et} \quad C = \frac{3}{10}MR^2 \ , \tag{11}$$

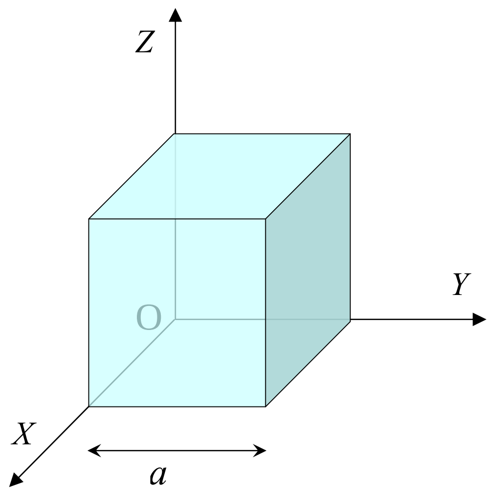
où h est la hauteur du cône et R le rayon de sa base. On obtient:

$$\dot{\varphi} = \frac{Mg\frac{3}{4}h}{\frac{3}{10}MR^2\omega_Z} = \frac{5gh}{2R^2\omega_Z} = \frac{5\times 10\times 0.1}{2\times 25\times 10^{-4}\times 2\times \pi\times 20} = \frac{25}{\pi}\,\mathrm{s}^{-1}. \tag{12}$$

La période de précession P est donc:

$$P = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = \frac{2\pi^2}{25} = 0.8 \ \text{ tours par seconde}. \tag{13}$$

2007MS8E1C :



Considérons un cube homogène de masse M et de côté a. Sa masse volumique est $\rho = M/a^3$. Le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox s'écrit:

$$\begin{aligned} I_{XX} &= \iiint \rho\left(Y^2+Z^2\right)dXdYdZ = \rho\left[\iiint Y^2 dXdYdZ + \iiint Z^2 dXdYdZ\right] \\ &= \rho\left[\left(\int_0^a dX\right)\left(\int_0^a Y^2 dY\right)\left(\int_0^a dZ\right) + \left(\int_0^a dX\right)\left(\int_0^a dY\right)\left(\int_0^a Z^3 dZ\right)\right] \\ &= \frac{M}{a^3}\left[a\times\frac{a^3}{3}\times a + a\times a\times\frac{a^3}{3}\right] = \frac{2}{3}Ma^2 \end{aligned} \quad (14)$$

et les moments d'inertie par rapport aux axes OY et OZ sont identiques à celui-ci par symétrie.

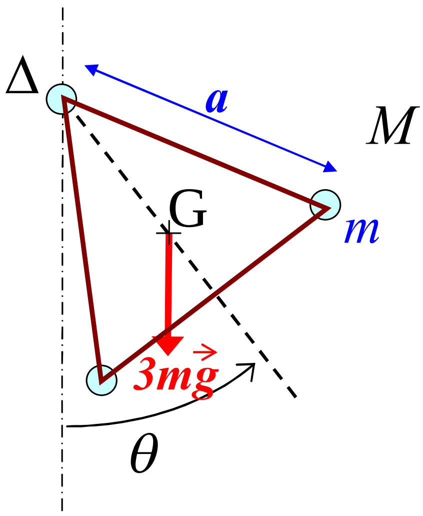
Le premier produit d'inertie s'écrit:

$$\begin{aligned} I_{XY} &= \iiint \rho XY dXdYdZ = \rho\left[\iiint XY dXdYdZ\right] = \rho\left[\left(\int_0^a XdX\right)\left(\int_0^a YdY\right)\left(\int_0^a dZ\right)\right] \\ &= \frac{M}{a^3}\left[\frac{a^2}{2}\times\frac{a^2}{2}\times a\right] = \frac{1}{4}Ma^2 \end{aligned} \quad (15)$$

et les autres produits d'inertie sont aussi égaux à celui-ci. La matrice d'inertie par rapport à un coin O du cube s'écrit donc:

$$\boxed{\bar{I}_O = Ma^2\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}. \quad (16)$$

<u>**2007MS8E2C :**</u>



Comme précédemment, la période des petites oscillations du pendule physique de masse $M=3m$ est:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{3mgd}}. \quad (17)$$

La distance d entre l'axe et le centre d'inertie est égal à 2/3 de la hauteur du triangle soit $d = 2h/3 = a/\sqrt{3}$. Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe Δ est $I=2ma^2$. On a donc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2ma^2}{\sqrt{3}mga}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{2a}{\sqrt{3}g}}}. \tag{18}$$

2007MS8E3C :

L'expression de la vitesse de précession de l'axe de rotation de la Terre due à la Lune est (cf chapitre 5 équation 5.32):

$$\dot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{GM_L}{d_{TL}^{\ 3}}\frac{C-A}{C}\frac{\cos\theta}{\omega_Z}, \tag{19}$$

où M_L est la masse de la Lune et d_{TL} la distance Terre-Lune. On peut éliminer ces deux quantités en faisant apparaître la période T_L de rotation de la Lune autour de la Terre. En effet, d'après la troisième loi de Kepler, on a:

$$\frac{d_{TL}^{\ 3}}{T_L^{\ 2}} = \frac{GM_T}{4\pi^2}, \tag{20}$$

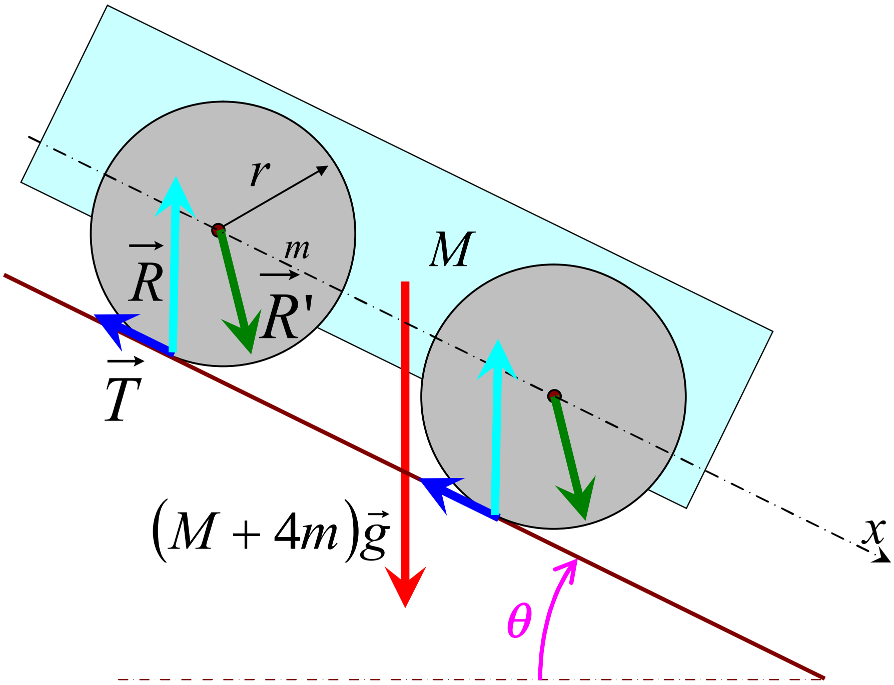
qui peut s'écrire:

$$\frac{G}{d_{TL}^{\ 3}} = \frac{4\pi^2}{T_L^{\ 2}M_T}. \tag{21}$$

On a donc:

$$\dot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{4\pi^2 M_L}{T_L^{\ 2}M_T}\frac{C-A}{C}\frac{\cos\theta}{\omega_Z} \cong -6\pi^2\frac{1}{81}\frac{C-A}{C}\frac{\cos\theta}{\omega_Z T_L^{\ 2}} \cong \boxed{-\frac{2\pi^2}{27}\frac{C-A}{C}\frac{\cos\theta}{\omega_Z T_L^{\ 2}}}. \tag{22}$$

2007MS8E4C :



Faisons le bilan des forces agissant sur l'ensemble du chariot et des roues : le poids total dû à la masse totale $M+4m$ et les réactions $\vec{R}$ du plan sur chaque roue, dont la composante tangentielle a un module T. Ecrivons le théorème de la quantité de mouvement projeté sur l'axe Ox parallèle au plan incliné et dirigé vers le bas :

$$(M+4m)a = (M+4m)g\sin\theta - 4T \ , \qquad (23)$$

où a est l'accélération du centre d'inertie du système.

Considérons maintenant les forces agissant sur chaque roue. Chaque roue subit son poids, la réaction $\vec{R}'$ de l'essieu et la réaction $\vec{R}$ du plan incliné. Appliquons à la roue le théorème du moment cinétique par rapport au centre de la roue, on obtient :

$$\frac{1}{2}mr^2\frac{d\omega}{dt} = rT \ , \qquad (24)$$

où ω est la vitesse angulaire de la roue. Seul le moment de la composante tangentielle de la réaction du plan joue. Les autres forces ont un moment nul par rapport au centre de la roue. Dans le cas du roulement sans glissement, on peut en outre écrire :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{r} \ . \qquad (25)$$

On obtient donc, à partir de l'équation (24) :

$$\frac{1}{2}ma = T \ , \qquad (26)$$

puis, en reportant dans l'équation (23) :

$$(M+4m)a = (M+4m)g\sin\theta - 2ma \ . \qquad (27)$$

soit :

$$\boxed{a = \frac{M+4m}{M+6m}g\sin\theta} \ . \qquad (28)$$

Avec huit roues, on obtient :

$$\boxed{a = \frac{M+8m}{M+12m}g\sin\theta} \ . \qquad (29)$$

2007MS8E5C :

La période des petites oscillations du pendule complet autour de l'axe 1 s'écrit:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{(M+m)gD_1}} \ , \qquad (30)$$

où I_1 est le moment d'inertie du pendule complet autour de l'axe 1 et D_1 la distance entre son centre d'inertie et cet axe. On a :

$$(M+m)D_1 = Md_1 + mx \ . \qquad (31)$$

D'autre part, on a :

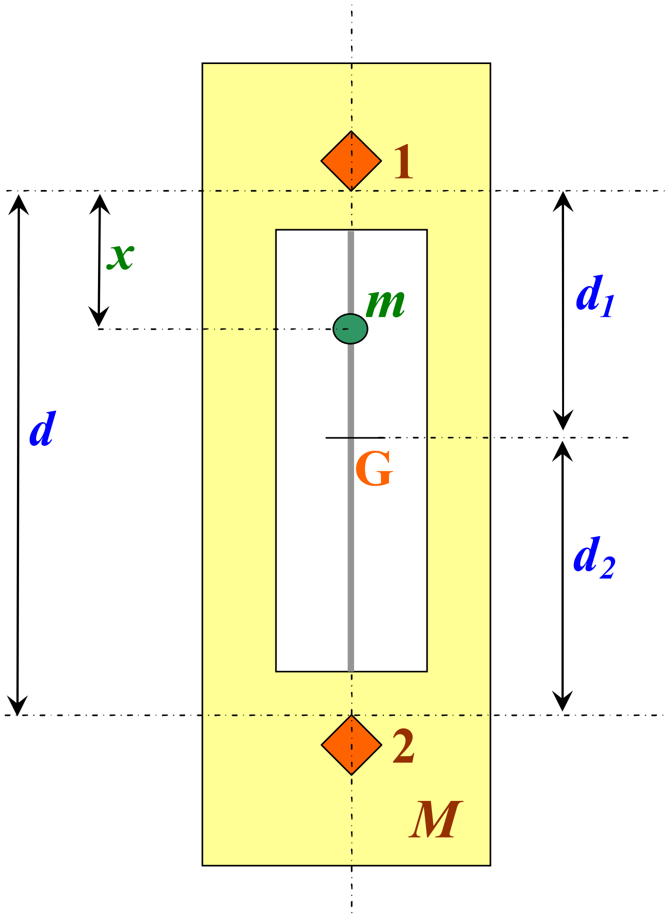
$$I_1 = J_1 + mx^2 \ , \qquad (32)$$

où J_1 est le moment d'inertie du socle par rapport à l'axe 1. Celui-ci peut s'écrire, grâce à la relation de Steiner-Huygens, en fonction du moment d'inertie J_G par rapport à l'axe parallèle à 1 et 2 passant par G :

$$J_1 = J_G + Md_1^2 \ . \qquad (33)$$

On a donc :

$$\frac{T_1^2}{4\pi^2}g = \frac{J_G + Md_1^2 + mx^2}{Md_1 + mx} \ . \qquad (34)$$



De même, la période des petites oscillations autour du deuxième axe s'écrit:

$$\frac{T_2^2}{4\pi^2}g = \frac{J_G + Md_2^2 + m(d-x)^2}{Md_2 + m(d-x)} = \frac{J_G + M(d-d_1)^2 + m(d-x)^2}{M(d-d_1) + m(d-x)} . \qquad (35)$$

Cherchons une position x_0 de la masselotte telle que $T_1 = T_2$. On aura alors :

$$\frac{J_G + Md_1^2 + mx_0^2}{Md_1 + mx_0} = \frac{J_G + M(d-d_1)^2 + m(d-x_0)^2}{M(d-d_1) + m(d-x_0)} . \qquad (36)$$

Quand on a deux fractions égales, elles sont aussi égales à toute combinaison liénaire des numérateurs et des dénominateurs. Ici, il sera astucieux de faire la différence :

$$\frac{J_G + Md_1^2 + mx_0^2}{Md_1 + mx_0} = \frac{\left[J_G + M(d-d_1)^2 + m(d-x_0)^2\right] - \left[J_G + Md_1^2 + mx_0^2\right]}{\left[M(d-d_1) + m(d-x_0)\right] - \left[Md_1 + mx_0\right]}$$
$$= \frac{Md^2 - 2Mdd_1 + md^2 - 2mdx_0}{Md - 2Md_1 + md - 2mx_0} = d \qquad .(37)$$

On a alors une équation pour x_0:

$$mx_0^2 - mdx_0 + J_G + Md_1^2 - Mdd_1 = 0 . \qquad (38)$$

qui aura une solution si et seulement si :

$$m^2 d^2 - 4m(J_G + Md_1^2 - Mdd_1) \geq 0 . \qquad (39)$$

soit :

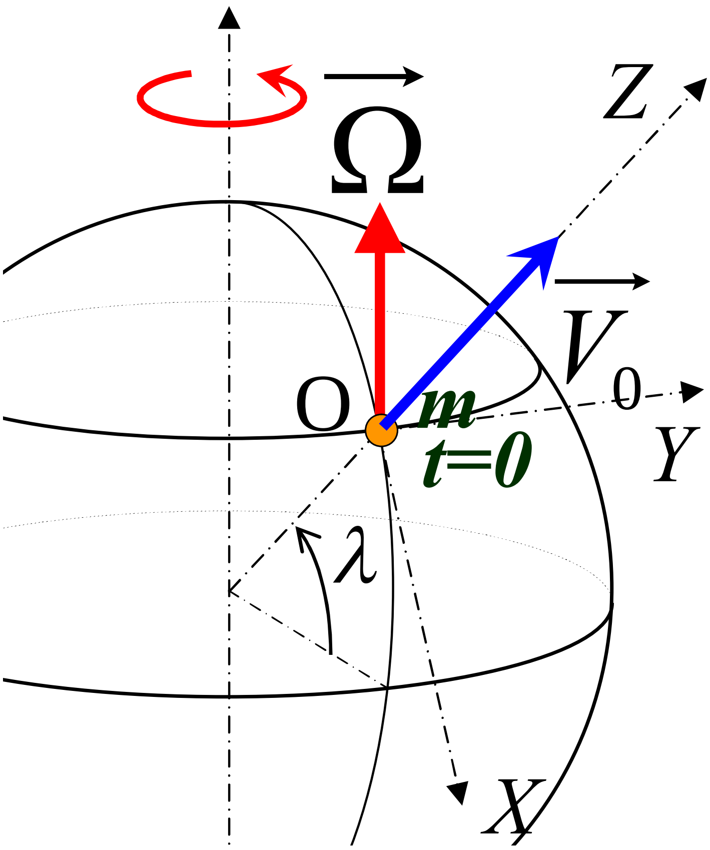
$$m \geq 4\frac{J_G + Md_1^2 - Mdd_1}{d} . \qquad (40)$$

La période des oscillations s'écrit alors, d'après l'équation (37) :

$$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}} \; ; \tag{41}$$

elle ne dépend que de la longueur d. La période est donc indépendante des valeurs des masses et de la connaissance du moment d'inertie du socle, ainsi que de la position de son centre d'inertie.

2007MS8E6C :



On procède comme dans l'étude de la déviation vers l'est dans la chute libre (chapitre 5 section 5.5.3). On a donc le système d'équations (5.71) pour les coordonnées *X(t)*, *Y(t)* et *Z(t)* du mobile dans le repère tournant:

$$\begin{cases} \ddot{X} = 0 \\ \ddot{Y} = -2\Omega\cos\lambda\dot{Z} \\ \ddot{Z} = -g \end{cases} . \tag{42}$$

Cette fois, cependant, les conditions initiales sont différentes. On a :

$$\dot{Z} = V_0 - gt \; , \tag{43}$$

où V_0 est la vitesse de lancement du boulet vers le haut.

En reportant dans la deuxième équation (42), on obtient :

$$\ddot{Y} = -2\Omega\cos\lambda\dot{Z} = -2\Omega\cos\lambda\left[V_0 - gt\right], \tag{44}$$

soit, en intégrant :

$$\dot{Y} = -2\Omega\cos\lambda\dot{Z} = -2\Omega\cos\lambda\left[V_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right] \quad (45)$$

$$Y = -\Omega\cos\lambda\left[V_0 t^2 - \frac{1}{3}gt^3\right] \quad (46)$$

Soit Y_1 la position du point où retombe le boulet. On a :

$$Y_1 = Y(\frac{V_0}{g}) = -\Omega\cos\lambda\left[V_0\frac{V_0^2}{g^2} - \frac{1}{3}g\left(\frac{V_0}{g}\right)^3\right] = -\frac{2}{3}\Omega\cos\lambda\frac{V_0^3}{g^2}. \quad (47)$$

Le boulet retombe donc à l'ouest !

Soit h la hauteur maximale atteinte par le boulet. On a $h=V_0^2/2g$ et par conséquent :

$$Y_1 = -\frac{2}{3}\Omega\cos\lambda\frac{(2gh)^{\frac{3}{2}}}{g^2} = -\frac{2}{3}\Omega\cos\lambda\frac{(2gh)^{\frac{3}{2}}}{g^2} = -2\frac{2\sqrt{2}}{3}\Omega\cos\lambda\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g}} = -2Y_0, \quad (48)$$

où Y_0 désigne la déviation vers l'est d'un mobile lâché sans vitesse initiale depuis la hauteur h (équation 5.76 du chapitre 5). Ainsi, le boulet de Mersenne retombe à l'ouest d'une distance égale à deux fois la déviation vers l'est qui aurait été observée si le mobile avait été lâché sans vitesse initiale depuis le sommet de sa trajectoire.