

1 - Oscillations libres de la Terre.

Maintenant, nous allons considérer une approche beaucoup plus générale qui permet de tenir compte de la sphéricité de la Terre (c'est un objet de taille finie) et d'autres effets (anélasticité, anisotropie, rotation, ...). On se place dans un système de coordonnées sphériques:

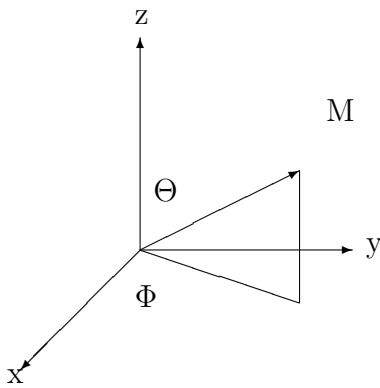


Figure 1: Système de coordonnées sphériques r, θ, ϕ

- Analogie avec les modes d'une cloche ou d'un instrument de musique.
- *La Sismologie est la musique de la Terre et les sismogrammes en sont les morceaux.* Il reste au sismologue à en écrire les partitions.

1.1 Sphère liquide homogène.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} \quad (1)$$

Dans un liquide, $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$, où P est la pression, et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$. Donc en reportant dans l'équation du mouvement:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (2)$$

Soit encore:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\mathbf{grad}P = -\nabla P \quad (3)$$

D'après la loi de Hooke,

$$\sigma_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (4)$$

où Θ est la dilatation, comme définie dans le Chapitre 1. Comme seuls les σ_{ii} sont non nuls, comme d'autre part, $P = -\frac{1}{3}\sum_i \sigma_{ii}$, on trouve:

$$P = -\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\text{div}\vec{u} \quad (5)$$

En posant $\kappa = -\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$, (sans oublier que $\mu = 0$), on obtient l'équation du mouvement dans une sphère liquide homogène:

$$c^2\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (6)$$

avec $c^2 = \frac{\kappa}{\rho}$, où c est la vitesse des ondes acoustiques dans le fluide.

Le laplacien en coordonnées sphériques s'exprime de la façon suivante:

$$\Delta P = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} \quad (7)$$

Séparation des variables.

La démarche consiste maintenant à résoudre l'équation (6) en essayant de séparer les variations radiales (en r) et latérales (en θ la colatitute et ϕ , la longitude). On cherche donc des solutions sous la forme:

$$P = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)e^{-i\omega t} \quad (8)$$

$$\Delta P = \frac{\Theta\Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R\Phi}{r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\Theta R}{r^2 \sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} R\Theta\Phi \quad (9)$$

Après quelques manipulations, on obtient:

$$\frac{\sin^2\theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2\theta}{c^2} = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} \quad (10)$$

Le premier membre ne dépend que de r et θ et le deuxième membre que de ϕ . On peut donc évaluer chaque membre à une constante. L'équation en ϕ est particulièrement simple à résoudre:

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = \text{cste} = m^2 \quad (11)$$

La solution de cette équation est: $\Phi = e^{\pm im\phi}$. Comme cette fonction est périodique en ϕ , m est un nombre entier. On remplace ensuite dans l'autre équation, sépare maintenant les variables r et θ et l'on obtient:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} = \frac{m^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \quad (12)$$

De nouveau, chaque membre est constant et égal à K , puisqu'il dépend de variables différentes.

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} - K = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}) = (\frac{m^2}{\sin^2\theta} - K)\sin\theta\Theta \quad (14)$$

La deuxième équation, pour $m = 0$ est l'équation de Legendre dont les solutions sont les polynômes de Legendre $P_\ell(\cos\theta)$. Les solutions non singulières donnent un ℓ entier. Là encore, ℓ est entier parce que P_ℓ doit être périodique. Quand $m \neq 0$, les solutions sont les polynômes de Legendre associées $P_\ell^m(\cos\theta)$. On peut montrer que le nombre ℓ est encore entier et on a la propriété supplémentaire $-\ell \leq m \leq \ell$, ce qui signifie que à une valeur de ℓ donnée, correspondent $2\ell + 1$ solutions. On dit que la solution est dégénérée avec un facteur de dégénérescence de $2\ell + 1$. On montre d'autre part que la constante K est égale à $\ell(\ell + 1)$.

Harmoniques sphériques: → voir par exemple Cohen-Tannoudji, Diu, Laloë, (Mécanique quantique, Hermann, Paris, 1975).

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi}.$$

Harmoniques sphériques généralisées (Voir Phinney and Burridge, Geophys. J.R. astr. Soc, 1973). $Y_\ell^{Nm}(\theta, \phi) = P_\ell^{Nm}(\cos\theta)e^{im\phi}$.

• Le troisième nombre quantique n provient de la condition aux limites sur $R(r)$. $R(r = a) = 0$ à la surface de la Terre pour $r = a$).

1.2 Généralisation à la Terre sphérique, élastique et isotrope.

On cherche des solutions pour lesquelles le déplacement $\vec{\mathbf{u}}$ est donné sous la forme:

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_n \sum_\ell \sum_m ({}_nU_\ell \cdot \mathbf{R}_\ell^{\mathbf{m}} + {}_nV_\ell \cdot \mathbf{S}_\ell^{\mathbf{m}} + {}_nW_\ell \cdot \mathbf{T}_\ell^{\mathbf{m}}) e^{-in\omega t} \quad (15)$$

où n , ℓ , m sont respectivement les ordres radiaux, angulaires et azimutaux. Les vecteurs $\mathbf{R}_\ell^{\mathbf{m}}(\theta, \phi)$, $\mathbf{S}_\ell^{\mathbf{m}}(\theta, \phi)$ et $\mathbf{T}_\ell^{\mathbf{m}}(\theta, \phi)$ sont deux à deux orthogonaux.

$$\mathbf{R}_\ell^{\mathbf{m}}(\theta, \phi) = Y_\ell^m \vec{r} \quad (16)$$

$$\mathbf{S}_\ell^{\mathbf{m}}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(\frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta} \vec{\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \phi} \vec{\phi} \right) \quad (17)$$

$$\mathbf{T}_\ell^{\mathbf{m}}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \phi} \vec{\theta} - \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta} \vec{\phi} \right) \quad (18)$$

Modes sphéroïdaux:

$$\text{rot} \vec{\mathbf{u}} = 0 \quad (19)$$

Modes toroïdaux:

$$\text{div} \vec{\mathbf{u}} = 0 \quad (20)$$

On utilise souvent une notation provenant de la Mécanique Quantique: $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{D} |n, \ell, \mathbf{m}\rangle$
 ${}_nU_\ell$, ${}_nV_\ell$, ${}_nW_\ell$ sont seulement des fonctions de r .

1.3 - Excitation des oscillations libres par une source.

On repart de l'équation de base de la mécanique et on cherche à calculer l'excitation des différents modes normaux par les tremblements de terre.

$$\rho_0 \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \sum_j \sigma_{ij,j} + f_i + \rho g_i \quad (21)$$

f_i et ρg_i représentent l'ensemble des forces externes appliquées. Par exemple, on considère souvent que les forces mises en jeu lors d'un séisme sont des forces externes, ce qui revient à isoler la zone d'occurrence du séisme du reste de la terre. De façon générale, on peut écrire cette équation sous la forme:

$$(\rho_0 \partial_{tt} + H_0) \vec{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \quad (22)$$

où H_0 est un opérateur intégral-différentiel et \mathbf{F} exprime l'ensemble des forces externes s'appliquant en \mathbf{r} à l'instant t . On néglige les forces de gravité et on suppose que \mathbf{F} est nul pour $t < 0$. D'autre part, on sait que l'équation sans second membre a pour solution les fonctions propres. On peut donc développer $\vec{\mathbf{u}}(\vec{r}, t)$ sur l'ensemble des fonctions propres $\vec{\mathbf{u}}_k(\vec{r}, t)$ que l'on notera $|\mathbf{k}\rangle = |\mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{m}\rangle$, n, l, m étant les 3 nombres quantiques définis au chapitre précédent. Les fonctions $|\mathbf{k}\rangle$ sont des fonctions orthogonales et normalisées. On a donc $\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \sum_k a_k(t) |\mathbf{k}\rangle$. L'équation sans second membre a pour solutions les fonctions propres $|\mathbf{k}\rangle$ telle que

$$(-\rho_0 \omega_k^2 + H_0) |\mathbf{k}\rangle = 0 \quad (23)$$

Le problème que l'on se pose maintenant: Comment calculer les coefficients d'excitation a_k ? On réécrit l'équation du mouvement sous la forme:

$$\sum_k (\rho_0 \partial_{tt} + H_0) a_k |\mathbf{k}\rangle = \sum_k F_k |\mathbf{k}\rangle \quad (24)$$

Pour se débarrasser de la variation en temps des fonctions propres, on prend la transformée de Laplace de l'équation ($L[f(p)] = \int_0^\infty f(t) e^{pt} dt$).

$$\sum_k \int_0^\infty (\rho_0 \partial_{tt} + H_0) a_k e^{pt} dt |\mathbf{k}\rangle = \sum_k \int_0^\infty F_k |\mathbf{k}\rangle e^{pt} dt \quad (25)$$

Pour des raisons pratiques, on passe de l'indice k à k' .

$$\sum_{k'} (\rho_0 p^2 + \rho_0 \omega_{k'}^2) a_{k'} |\bar{\mathbf{k}}'\rangle = \sum_{k'} \bar{F}_{k'} |\bar{\mathbf{k}}'\rangle \quad (26)$$

où $|\bar{\mathbf{k}}'\rangle$ est la transformée de Laplace de $|\mathbf{k}'\rangle$.

On prend maintenant le produit scalaire avec $\langle \bar{\mathbf{k}} |$. On choisit aussi de normaliser les $|\mathbf{k}\rangle$ tels que $\langle \mathbf{k} | \rho_0 | \mathbf{k}' \rangle = \int_V \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \rho_0 \mathbf{u}(\mathbf{r}) dV = \delta_{kk'}$.

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres,

$\langle \bar{\mathbf{k}} | H_0 | \bar{\mathbf{k}}' \rangle = \omega_k^2 \delta_{kk'}$. Il reste donc:

$$a_k (p^2 + \omega_k^2) = \sum_{k'} \langle \bar{\mathbf{k}} | \bar{F}_{k'} | \bar{\mathbf{k}}' \rangle \quad (27)$$

On rappelle qu'un produit scalaire de 2 fonctions propres est égal à:

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) dV \quad (28)$$

et le produit $\langle \mathbf{k} | A | \mathbf{k}' \rangle$ s'exprime par:

$$\langle \mathbf{k} | A | \mathbf{k}' \rangle = \int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) A(\mathbf{u}_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r})) dV \quad (29)$$

Donc la transformée de Laplace du déplacement s'exprime sous la forme:

$$\vec{u}(\mathbf{r}, p) = \sum_k \sum_{k'} \frac{\langle \bar{\mathbf{k}} | \bar{F} | \bar{\mathbf{k}}' \rangle}{p^2 + \omega_k^2} |\bar{\mathbf{k}}\rangle \quad (30)$$

Comme on s'intéresse principalement à la réponse longue période de la terre, on peut considérer qu'un tremblement de terre correspond à un saut instantané des contraintes dans un volume fini. On prend comme approximation que $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ est une fonction de Heaviside temporelle $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = H(t)\mathbf{F}_0(\mathbf{r})$. Sa transformée de Laplace est $\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{p}\mathbf{F}_0(\mathbf{r})$.

$$\vec{u}(\mathbf{r}, p) = \sum_k \sum_{k'} \frac{\langle \bar{\mathbf{k}} | F_0 | \bar{\mathbf{k}}' \rangle}{p(p^2 + \omega_k^2)} |\bar{\mathbf{k}}\rangle \quad (31)$$

On prend maintenant la transformée de Laplace inverse.

$$L\left(\frac{1}{p(p^2 + \omega_k^2)}\right) \rightarrow \frac{(1 - \cos\omega_k t)}{\omega_k^2} \quad (32)$$

On trouve donc finalement une expression générale du déplacement:

$$\vec{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \int_{V_0} d\xi \vec{u}_{\mathbf{k}}^*(\xi) \mathbf{F}_0(\xi) \vec{u}_{\mathbf{k}} \frac{1 - \cos\omega_k t}{\omega_k^2} \quad (33)$$

Cette expression correspond à l'ordre 0 de l'approximation de Born.

Cette solution est complètement générale. Elle permet d'exprimer (théoriquement) tout type de déplacement à la surface de la Terre. On peut grâce à elle synthétiser aussi bien les ondes surface que les ondes de volume. Evidemment, d'un point de vue pratique, on est limité par le nombre de modes à sommer, mais on sait actuellement descendre jusqu'à des périodes de l'ordre de 10s.

On peut même rajouter l'anélasticité. Il suffit de remplacer ω_k par une fréquence complexe $\omega(1 + \frac{i}{2Q_k})$.

1.4 Passage aux ondes de surface.

Le problème qui se pose maintenant est de relier les deux approches prises précédemment à savoir l'approche onde de surface dans le cas plan et l'approche en termes de modes normaux dans le cas sphérique. On part de l'équation (33) en laissant de côté le terme statique en $\frac{1}{\omega_k^2}$ auquel ne correspond aucune oscillation. On écrit que :

$$\int_{V_0} d\xi \vec{u}_{\mathbf{k}}^*(\xi) \mathbf{F}_0(\xi) = \mathbf{S}_{\mathbf{k}} \quad (34)$$

et alors:

$$\vec{u}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\sum_k \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k Y_\ell^m e^{i\omega_k t}) \quad (35)$$

On peut faire un développement asymptotique de $P_\ell^m(\cos\theta)$

$$P_\ell^m(\cos\theta) = l^{m-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi \sin\theta}} \cos[(l + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}] \quad (36)$$

On considère seulement u_r et le cas $m = 0$. On veut maintenant transformer la somme sur ℓ en somme sur les fréquences ou nombres d'onde. On utilise pour cela la transformation de Watson. Pour une fonction discrète H_ℓ prolongée par une fonction régulière de ν au voisinage de l'axe réel et prenant les valeurs $h(\nu) = H_\ell$ pour $\nu = \ell$, on a en appliquant le théorème des résidus:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} H_\ell (-1)^\ell = \frac{1}{2i} \int_C \frac{h(\nu)}{\sin\pi\nu} d\nu \quad (37)$$

où C est un contour autour de l'axe réel positif. La conséquence pratique après quelques manipulations est:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell + \frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu) e^{-i\pi\nu} \left(\sum_{q=0}^{\infty} e^{-2i\pi\nu q} d\nu \right) \quad (38)$$

On peut l'appliquer à la variable $\ell + \frac{1}{2}$ et ainsi se débarrasser de la somme sur ℓ . En revanche on doit conserver la somme sur l'indice n c'est-à-dire sur les modes harmoniques. Par exemple:

$$\sum_{\ell} n A_\ell e^{i(n\omega_\ell t - (l + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4})} = \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n A_\ell e^{i(n\omega_\ell t - \nu\theta - \frac{\pi}{4}) - i\pi\nu(1+2q)} d\nu \quad (39)$$

En remplaçant dans le déplacement, on peut faire apparaître deux phases ψ_q^+ et ψ_q^- telles que:

$$u_r(r, \theta, \phi, t) = \sum_n \sum_q \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu n A_\ell \left(e^{i(n\omega_\ell t + \psi_q^+)} + e^{i(n\omega_\ell t + \psi_q^-)} \right) \quad (40)$$

avec $\psi_q^+ = -\nu(\theta + 2\pi q) - \frac{\pi}{4} + \phi_0^+$ et $\psi_q^- = +\nu(\theta - 2\pi(q+1)) - \frac{\pi}{4} + \phi_0^-$. Donc à ψ_q^+ et ψ_q^- vont correspondre respectivement les trains R_1, R_3, R_5, \dots et R_2, R_4, R_6, \dots . On peut aussi se replacer dans l'espace des nombres d'onde k . $k = \frac{(l + \frac{1}{2})}{a} = \frac{\nu + \frac{1}{2}}{a}$ avec a le rayon de la terre. Donc $dk = \frac{d\nu}{a}$; on remplace aussi θ par la distance épacentrale Δ telle que $\theta = \frac{\Delta}{a}$. On trouve alors pour le déplacement $u_r(r, \theta, \phi, t)$:

$$u_r(r, \theta, \phi, t) = \sum_n \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n A'_\ell \left(e^{i(n\omega_\ell t - k\Delta + \phi_q^+)} + e^{i(n\omega_\ell t + k\Delta + \phi_q^-)} \right) dk \quad (41)$$

On a donc fait apparaître les différents trains d'onde de surface et montré l'équivalence des deux approches (plane et sphérique). Le même genre de développement peut être effectué pour les composantes horizontales (et pour $m \neq 0$). A retenir les correspondances entre les deux approches: nombre d'onde $k = \frac{(l + \frac{1}{2})}{a}$, longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi a}{(l + \frac{1}{2})}$, vitesse de phase $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega(l + \frac{1}{2})}{a}$, vitesse de groupe $U = \frac{d\omega}{dk}$.

1.5 Applications

Les théories développées peuvent être appliquées à l'étude des sismogrammes. La comparaison quantitative des sismogrammes observés et réels permet d'obtenir des informations fondamentales à la fois sur les sources sismiques et sur la structure profonde de la Terre.

Nous présentons dans le paragraphe suivant des exemples d'applications à l'étude des sources sismiques et la partie suivante fait l'objet des applications de type structural (Tomographie ou imagerie sismique. Les sismogrammes sont fournies par des réseaux sismiques que nous allons maintenant décrire.

1.5.1 Les réseaux sismiques.

Les nouvelles technologies mises en oeuvre dans les nouveaux réseaux permettent de combler le gap entre les sismologies courte période et longue période → notion de sismologie très large bande

Description du réseau GEOSCOPE et autres réseaux modernes (IRIS, GeoFon, MedNet, C.D.S.N.....):

Voir Brochure GEOSCOPE

Nouveau défi pour l'an 2000: l'installation de stations au fond de la mer.

1.5.2 Applications:

Calcul de sismogrammes synthétiques par sommation de modes normaux.

Exemples et comparaison avec données réelles.

Inversion du tenseur des moments sismiques.

Terme source:

$$S_k = \int_{V_0} \vec{u}_k^*(\vec{\xi}) \mathbf{F}_0(\vec{\xi}) d\vec{\xi} \quad (42)$$

$$\mathbf{F}_0 = -\text{div} \cdot \mathbf{M} \quad (43)$$

$$f_p = -M_{pq} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \delta(\vec{\xi} - \vec{\xi}_S) \quad (44)$$

$$\int_V \vec{u}_k^*(\vec{\xi}) \mathbf{F}_0(\vec{\xi}) dV(\vec{\xi}) = \sum_{pq} \int_V u_{kp} M_{pq} \frac{\partial}{\partial \xi_q} (\vec{\xi} - \vec{\xi}_S) dV(\vec{\xi}) \quad (45)$$

En intégrant par parties, on peut montrer que: $u_{kp,q}(\xi_S) = {}_k \epsilon_{pq}(\xi_S) M_{pq}$ où ${}_k \epsilon_{pq}$ est la composante pq du tenseur des déformations pour le mode normal k au point ξ_S , et où \mathbf{M} est le tenseur des moments sismiques. On montre alors pour une source ponctuelle au point \vec{x}_S que:

$$\int_{V_0} \vec{u}_k^*(\vec{\xi}) \mathbf{F}_0(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = {}_k \epsilon_{pq}(\xi_S) M_{pq} \quad (46)$$

Donc le terme source s'exprime sous la forme: $S_k = \sum_{pq} {}_k \epsilon_{pq} M_{pq}$

On obtient donc une relation purement linéaire entre l'expression du déplacement donné par (33) et les différentes composantes du tenseur des moments M_{pq} . Il est donc très facile de mettre au point une méthode d'inversion des composantes du tenseur M_{pq} en réécrivant l'expression du déplacement:

$$= \mathbf{G}_{\mathbf{pq}}(\mathbf{r}, \xi_{\mathbf{S}}, t) M_{pq}$$

Application en routine à l'inversion du tenseur des moments. On peut raffiner l'inversion pour les très gros séismes en relâchant l'hypothèse d'une source ponctuelle dans le temps et l'espace, grâce aux données large-bande (Figure P. Ihmlé, 1997).