L2 - Physique pour les sciences de l'univers
TD N°1

Jeudi 16 février 2006

Exercice 1 : Règles de calcul vectoriel

Montrer les égalités suivantes :

1) $\overrightarrow{\nabla}(\lambda\mu) = \lambda\overrightarrow{\nabla}\mu + \mu\overrightarrow{\nabla}\lambda$.
2) $\overrightarrow{\nabla} \cdot (\lambda\overrightarrow{A}) = \lambda\ (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{\nabla}\lambda) \cdot \overrightarrow{A}$.
3) $\overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = -\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B}) + (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{B}$.
4) $\overrightarrow{\nabla} \times (\lambda\overrightarrow{A}) = \lambda\,(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{\nabla}\lambda) \times \overrightarrow{A}$.

5) Double produit vectoriel : $\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C})\overrightarrow{B} - (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})\overrightarrow{C}$.
6) Application pour : $\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{A}\ \ (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}) - \overrightarrow{B}\ \ (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}) + (\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{A} - (\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{B}$.
7) Calculer div $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$, div $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$.

Exercice 2 : Résultats à retenir

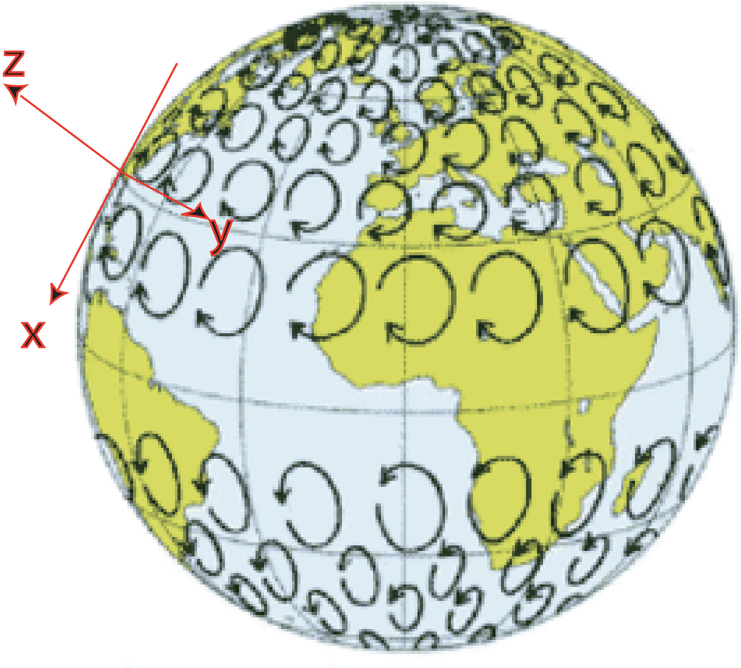
1) Soit un champ scalaire $f(r) = r$. Calculer le gradient de ce champ scalaire, en coordonnées cartésiennes, puis en sphériques.
2) Justifier pourquoi, si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x) = \dfrac{df}{dx}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,x$.
3) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$, pour f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que :
   a. $f(r) = r^n$, $n \in \mathbb{N}$,
   b. $f(r) = \dfrac{1}{r}$,
   c. $f(r) = \dfrac{1}{r^n}$, $n \in \mathbb{N}$,
   d. $f(r) = \ln r$.

Exercice 3 : Produit vectoriel

Rappel sur la force de Coriolis : un objet qui se déplace à une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un référentiel en rotation $\overrightarrow{\Omega}$ "ressent" une force de Coriolis $\overrightarrow{F_c} = 2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$.
On considère ici un point immobile à la surface de la Terre à une latitude λ.

1) Dans le repère cartésien associé à ce point, les axes (Ox), (Oy) représentent les directions Nord-Sud et Ouest-Est respectivement et (Oz) est l'axe vertical perpendiculaire à la surface. Comment exprime-t-on $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur de rotation de la Terre dans ce repère ? Quelle est sa norme ?
2) Le point se déplace alors à une vitesse $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, 0)$. Déterminer l'accélération de Coriolis ressentie.

3) Application numérique : $\lambda = 45°$, $v_x = 360$ km/h, $v_y = 0$. Comparer les valeurs de l'accélération de Coriolis et de l'accélération de la pesanteur g. Commenter ?



Exercice 4 : Champs et potentiels

Tout point $M(x, y, z)$ de l'espace est défini par sa position par rapport à un point fixe arbitraire O : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$. On note la distance au point O : $OM = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Chaque question est indépendante.

1) Soit un champ vectoriel $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r})$. Calculer le divergent de ce champ si $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}) = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$, $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{r}) = f(r)\,\overrightarrow{r}$. Ces champs dérivent-ils d'un potentiel ? Si oui lequel ?
2) On considère le champ scalaire $f(M) = \dfrac{\ln r}{r}$. Déterminer le champ vectoriel $\overrightarrow{u}(M)$ dérivé de ce potentiel.
3) Soit un champ vectoriel qui à un point de l'espace $M(x, y, z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u} = (xz, y, \phi(z))$. Déterminer ϕ pour que div $\overrightarrow{u} = z$.
4) Soit un champ scalaire $f(M) = xy + yz + xz$. On se place au point $A = (1, 1, 1)$: dans quelle direction la variation du champ est-elle la plus rapide ? Et au point $B = (1, 2, 3)$?