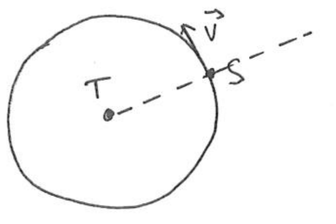
Exercice 1 - Satellites géostationnaires



On note $\vec{R} = \vec{TS}$ le vecteur distance entre la Terre et le satellite.

1- La Terre exerce une force gravitationnelle sur le satellite : $\vec{F_g} = -\frac{GMm}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}$

(la Terre "attire" le satellite).

2- Le satellite se déplace à une vitesse $\vec{V}$.

La force centrifuge s'écrit :

$$\vec{F_c} = \frac{V^2}{R} m \frac{\vec{R}}{R}$$

avec $V = \omega R$ où ω est la vitesse angulaire du satellite.

Equilibre dynamique :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F_g} + \vec{F_c}$$

si le satellite a une vitesse constante sur son orbite circulaire, on a l'équilibre des forces.

$$\vec{F_g} + \vec{F_c} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \frac{V^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$$

(3) Satellite géostationnaire

Pour qu'un satellite reste toujours à la même position pour un observateur terrestre, il faut que sa vitesse angulaire soit égale à la vitesse de rotation de la Terre

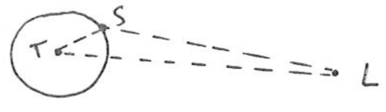
On note $\Omega = \frac{2\pi}{86400}$ la vitesse de rotation terrestre.

(4) On cherche R_{geo}, la distance T-satellite pour laquelle on a $\omega = \Omega$.

$$\Omega^2 R_{geo} = \frac{GM}{R_{geo}^2} \Rightarrow \boxed{R_{geo} = \left(\frac{GM}{\Omega^2}\right)^{1/3}}$$

$R_{geo} = 42\,249$ km.

(5) On prend en compte l'attraction de la Lune.



Soit $\vec{d} = \vec{SL}$ le vecteur distance Satellite-Lune.

La Lune attire le satellite : on a une force gravitationnelle $\vec{F_L} = -\frac{G m M_L}{d^2} \frac{\vec{d}}{d}$

La distance d varie suivant la position du satellite sur son orbite.

Soit d_0 la distance Terre-Lune.

$$d_0 - R < d < d_0 + R$$

$$\rightarrow \quad |F_L| = \frac{G m M_L}{d^2} < \frac{G m M_L}{(d-R)^2}$$

On a $R << d \Rightarrow |F_L| \sim \frac{G m M_L}{d_0^2}$

$\Rightarrow$ On a le rapport $\frac{|F_L|}{|F_g|} = \frac{G M_L}{d_0^2} \frac{R^2}{G M_T} = \frac{M_L}{M_T} \frac{R^2}{d_0^2}$

Pour un satellite géostationnaire, $\frac{R}{d} \simeq 0{,}1$

$\rightarrow \frac{|F_L|}{|F_g|} \simeq 1{,}5 \times 10^{-4}$

(6) <u>Forces de frottement.</u>

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F_g} + \vec{F_c} + \vec{F}_{frottement}.$$

- si pas de frottement $\vec{F}_{frottement} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \text{ équilibre.}$$

- si frottement $\vec{F}_{frottement} < \vec{0}$

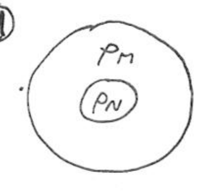
$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} < \vec{0}$$

le satellite ralentit

donc la force centrifuge diminue.

$\vec{F_g}$ ne variant pas, le satellite va "tomber".

Exercice 2. Calcul de la gravité et de la pression dans la Terre.

① 

Masse de la Terre = masse du noyau + masse du manteau.

$M_{Noyau} = \frac{4}{3}\pi \rho_N b^3$

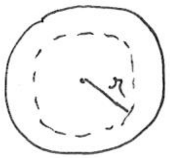
$M_{Manteau} = \frac{4}{3}\pi [a^3 - b^3]\rho_M$.

$\rightarrow M_{Terre} = \frac{4}{3}\pi [a^3\rho_M + b^3(\rho_N - \rho_M)]$

Soit ρ la masse volumique moyenne de la Terre telle que $M_{Terre} = \frac{4}{3}\pi\rho a^3$

on a $\boxed{\rho = \rho_M + \frac{b^3}{a^3}(\rho_N - \rho_M)}$

A.N. $\rho = 5512$ kg/m^3

② 

soit une sphère de rayon $0 < r < a$.
Soit $M(r)$ la masse de cette sphère.

$g(r) = + \frac{G M(r)}{r^2}$ d'après la formule de Gauss.

- dans le noyau : $0 \leq r \leq b$

$M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_N r^3$

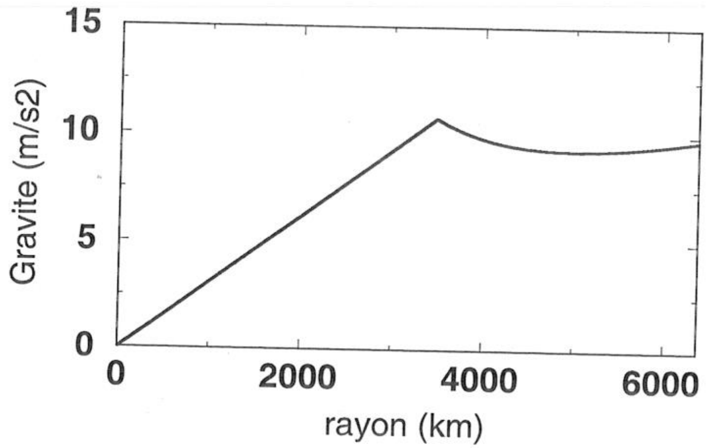
$\Rightarrow g(r) = \frac{4}{3}\pi G \rho_N r$ si $0 \leq r \leq b$

- dans le manteau : $b \leq r \leq a$

$M(r) = \frac{4}{3}\pi [\rho_N b^3 + \rho_M(r^3 - b^3)]$

$\Rightarrow g(r) = \frac{4}{3}\pi G \left[(\rho_N - \rho_M)\frac{b^3}{r^2} + \rho_M r \right]$ si $b \leq r \leq a$

- en $r = 0$, $g(0) = 0$.



③ <u>Pression hydrostatique.</u>

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)\, g(r).$$

- dans le noyau :

$$\frac{dP_N}{dr} = -\rho_N \frac{4}{3}\pi G \rho_N r$$

$$\Rightarrow \quad P_N(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_N^2 \frac{r^2}{2} + P_1$$

avec P_1 constante d'intégration.

- dans le manteau :

$$\frac{dP_M(r)}{dr} = -\rho_M \frac{4}{3}\pi G \left[\rho_M r + (\rho_N - \rho_M)\frac{b^3}{r^2} \right]$$

$$\Rightarrow P_M(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_M \left[\rho_M \frac{r^2}{2} - (\rho_N - \rho_M)\frac{b^3}{r} \right] + P_2$$

avec P_2 constante d'intégration.

- <u>Conditions aux limites</u>

  - $P_M(a) = 0$ (on néglige la pression atmosphérique)
  - $P_M(b) = P_N(b)$ pression continue à l'interface noyau-manteau.

* $P_M(a) = 0 \Rightarrow P_2 = \frac{2\pi G}{3}\rho_M a^2 \left[\rho_M \left(1 + 2\frac{b^3}{a^3}\right) - \frac{2b^3}{a^3}\rho_N \right]$

* $P_M(b) = P_N(b) \Rightarrow P_1 = \frac{2\pi G}{3}\rho_M a^2 \left[\rho_M + \frac{2b^3}{a^3}(\rho_M - \rho_N) + \frac{b^2}{a^2}\left(2\rho_N - 3\rho_M + \frac{\rho_N^2}{\rho_M} \right) \right]$

$P_2 = 0{,}57 \cdot 10^{11}\ Pa$ et $P_1 = 0{,}33 \cdot 10^{12}\ Pa$.

- <u>A l'interface noyau manteau :</u>

$$P_N(b) = -\frac{4\pi}{3} G \rho_N^2 \frac{b^2}{2} + P_1$$

$$\Rightarrow P_N(b) = 123 \times 10^9\ Pa$$

- <u>Au centre de la Terre</u>

$P_N(0) = P_1 \quad \Rightarrow \quad P_N(0) = 3{,}3 \times 10^{11}\ Pa$

$= 330$ Giga Pa.

- Pression lithostatique

à une profondeur z depuis la surface de la Terre,

on a $r = a - z$.

$z << a$ (on reste proche de la surface).

$$\begin{cases} r^2 = a^2\left(1-\frac{z}{a}\right)^2 \simeq a^2\left(1-\frac{2z}{a}\right) \\ \frac{1}{r} = \frac{1}{a\left(1-\frac{z}{a}\right)} \simeq \frac{1}{a}\left(1+\frac{z}{a}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_M(r) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_M \left[\frac{a^2}{2}\rho_M\left(1-\frac{2z}{a}\right) - (\rho_N-\rho_M)\frac{b^3}{a}\left(1+\frac{z}{a}\right) + \frac{b^3}{a}\rho_N - \frac{a^2}{2}\left(1+2\frac{b^3}{a^3}\right)\rho_M \right]$$

$$= -\frac{4}{3}\pi G \rho_M \frac{z}{a}\left[-\rho_M a^2 - (\rho_N-\rho_M)\frac{b^3}{a}\right]$$

Soit $g_0 = g(a) = \frac{4}{3}\pi G\left[\rho_M a + (\rho_N-\rho_M)\, b^3/a^2\right]$

on a $\boxed{P_M(z) = +\rho_M g_0 z}$