Licence STEP L2
Module Physique pour les géosciences 2
Mécanique des solides et des planètes

MS3: Corrigé du TD du 18 février 2008

Exercices obligatoires

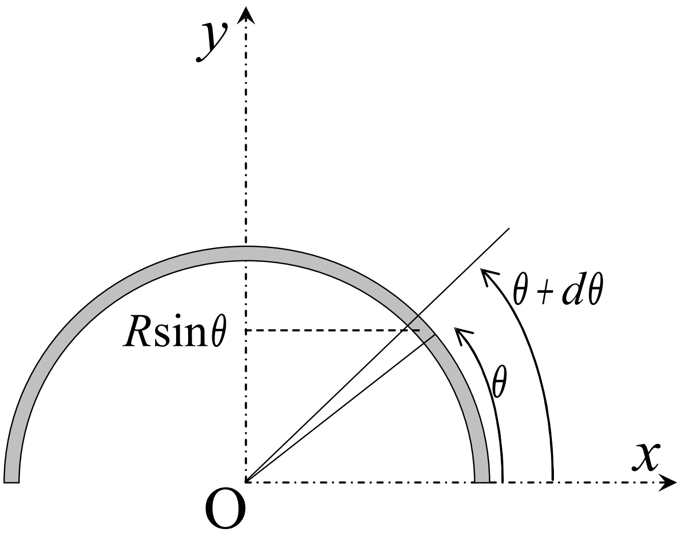
Exercice 1

Par symétrie, le centre d'inertie du demi-cerceau est sur l'axe Oy de son plan perpendiculaire à sa base et passant par son milieu. La position y_G du centre d'inertie sur cet axe vérifie :

$$y_G = \frac{1}{M}\int y dm \tag{1.1}$$

où M est la masse du cerceau. Découpons notre cerceau en petits secteurs d'angle $d\theta$. Comme le cerceau est homogène, chaque petit bout de cerceau contient une petite masse $dm=Md\theta/\pi$. D'autre part, la coordonnée y de chaque point du cerceau s'écrit $R\sin\theta$, R étant le rayon du cerceau. On a donc :

$$y_G = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} R\sin\theta \frac{Md\theta}{\pi} = \frac{2}{\pi}R \tag{1.2}$$

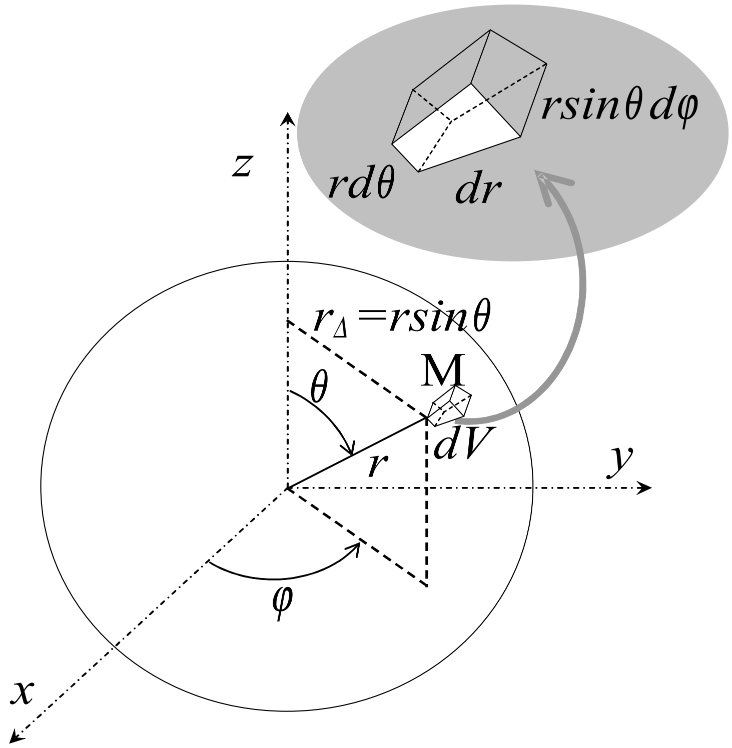


Exercice 2

Soit une sphère homogène de rayon R et de masse M. Sa masse volumique est :

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} \tag{2.1}$$

Calcul du moment d'inertie en coordonnées sphériques:



Plaçons-nous tout d'abord en coordonnées sphériques $r,\ \theta,\ \varphi$ et calculons le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical Oz. La distance à l'axe OZ est $r_\Delta = r\sin\theta$. Un petit élément de volume $dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$ contient une petit mase $dm = \rho dV$. On a alors :

$$I_\Delta = \int \rho\, r_\Delta^{\ 2} dV = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\theta\ r^2 \sin\theta\ \ dr d\theta\, d\varphi \qquad (2.2)$$

Chaque intégrale dans cette intégrale multiple ne dépend que d'une seule variable et donc on peut la séparer en un produit de trois intégrales :

$$I_\Delta = \rho \left[\int_0^R r^4 dr\right]\left[\int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta\right]\left[\int_0^{2\pi} d\varphi\right] \qquad (2.3)$$

Calculons séparément la deuxième intégrale :

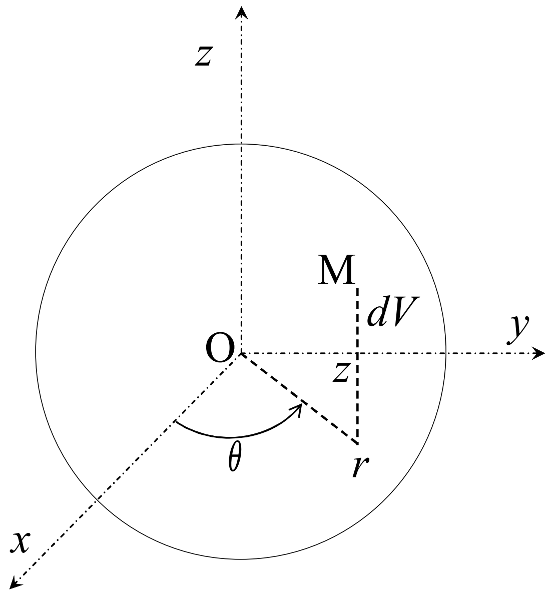
$$\int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta = -\int_1^{-1}\left[1-u^2\right]du = \int_{-1}^{1}\left[1-u^2\right]du = 2\int_0^1\left[1-u^2\right]du = 2\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3} \qquad (2.4)$$

On a donc :

$$I_\Delta = \frac{3M}{4\pi R^3} \times \frac{R^5}{5} \times \frac{4}{3} \times 2\pi = \frac{2}{5}MR^2 \qquad (2.5)$$

Calcul en coordonnées cylindriques:

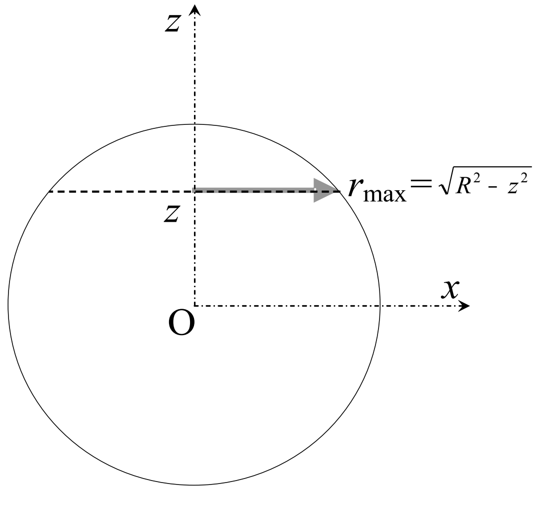
Plaçons-nous maintenant en coordonnées cylindriques $r,\ \theta,\ z$. Les coordonnées $r,\ \theta$ sont maintenant définies dans le plan horizontal Oxy.



La distance à l'axe OZ est maintenant tout simplement r et le petit élément de volume s'écrit $dV=rdrd\theta dz$. Le moment d'inertie par rapport à z devient :

$$I_\Delta = \int \rho\, r^2 dV = \rho \int_{-R}^{R} dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dr \int_0^{2\pi} r^2\, r d\theta \qquad (2.6)$$

Dans l'écriture de l'intégrale (2.6), on a bien pris garde aux bornes. Pour un z donné, en effet, le rayon r varie entre 0 et $r_{max}=\sqrt{R^2-z^2}$ (voir figure ci-dessous en coupe à θ constant).



On peut tout de même séparer l'intégrale sur l'angle. On a donc :

$$I_\Delta = \rho \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_{-R}^{R} dz \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3\, dr\right)\right] \qquad (2.7)$$

On a :

$$\int_{-R}^{R} dz \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3\,dr \right) = \int_{-R}^{R} dz \left(\frac{\left(R^2-z^2\right)^2}{4} \right) = \frac{1}{2}\int_0^R dz\left[R^4 - 2R^2z^2 + z^4\right] = \frac{R^5}{2}\left[1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right] = \frac{4R^5}{15} \qquad (2.8)$$

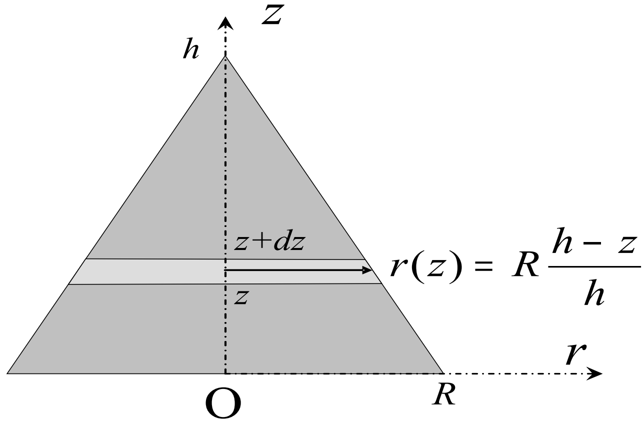
et on obtient :

$$I_\Delta = \frac{3M}{4\pi R^3} \times 2\pi \times \frac{4R^5}{15} = \frac{2}{5}MR^2 \qquad (2.9)$$

On vérifie qu'on retrouve bien le même résultat que pour le calcul en coordonnées sphériques.

Exercice 3:

Par symétrie, le centre d'inertie du cône homogène est sur l'axe Oz de symétrie de révolution. Sa position z_G sur cet axe vérifie $z_G = \frac{1}{M}\int zdm$ où M est la masse du cône.



Comme il est homogène, sa masse volumique est $\rho = M/(\pi R^2 h/3) = 3M/\pi R^2 h$, h étant sa hauteur et R le rayon de sa base. Découpons notre cône en petites tranches comprises entre z et $z+dz$ (voir figure). Chaque tranche possède un rayon $r(z)=R(h-z)/h$ et une masse dm donnée par $dm=\rho\times\pi r(z)^2 dz$. On a donc:

$$z_G = \frac{1}{M}\int_0^h zdm = \frac{1}{M}\int_0^h z\rho\,\pi\left(R\frac{h-z}{h}\right)^2 dz = \frac{1}{M}\frac{3M}{\pi R^2 h}\pi\,\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z\left(h-z\right)^2 dz =$$
$$= \frac{3}{h^3}\int_0^h \left[zh^2 - 2hz^2 + z^3\right]dz = \frac{3}{h^3}\left[\frac{h^2}{2}h^2 - 2h\frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4}\right] = 3h\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) \qquad (3.1)$$
$$z_G = \frac{h}{4}$$

On connaît le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz de chaque petit disque élémentaire, c'est ½$dmr(z)^2$. Pour obtenir le moment d'inertie I_{zz} de tout le cône par rapport à l'axe Oz, il suffit de sommer toutes ces petites contributions:

$$I_{zz} = \int r^2 dm = \int_0^h \frac{1}{2}\rho\,\pi\left(R\frac{h-z}{h}\right)^4 dz = \frac{1}{2}\frac{3M}{\pi R^2 h}\pi\,\frac{R^4}{h^4}\int_0^h (h-z)^4 dz = \frac{3}{10}MR^2 \qquad (3.2)$$

Exercices complémentaires

Exercice 1C:

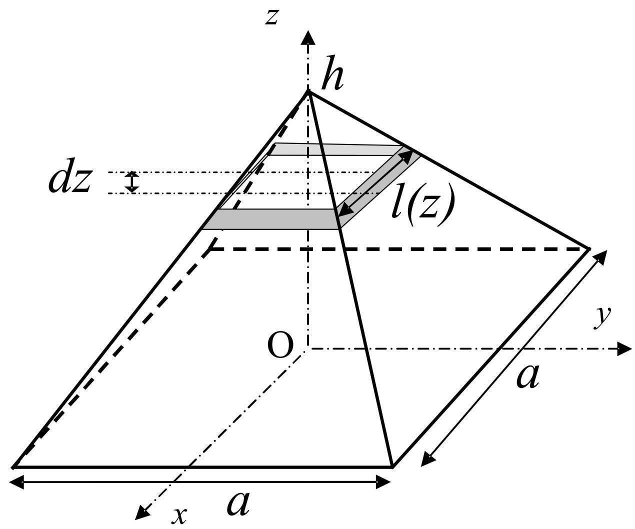
La position du centre d'inertie G de la pyramide à base carrée est donnée par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\int \rho\,\overrightarrow{OM}dV \qquad (1C.1)$$

où M et ρ sont respectivement sa masse et sa masse volumique. Comme la pyramide est homogène, on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V}\int \overrightarrow{OM}dV \qquad (1C.2)$$

où V est le volume de la pyramide.



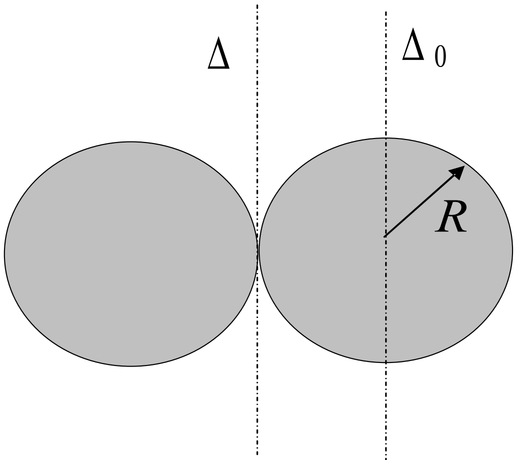
Soit a le côté de la base de la pyramide et h sa hauteur. Par symétrie, on peut affirmer que le centre d'inertie G se trouve sur l'axe vertical Oz de la pyramide. Reste à trouver sa position z_G. Pour cela, découpons la pyramide en petites tranches d'épaisseur dz entre z et $z+dz$ parallèles au plan horizontal Oxy. Chaque tranche est un carré de côté $l(z)=(h-z)a/h$. On a donc :

$$z_G = \frac{1}{V}\int_0^h z\left((h-z)\frac{z}{h}\right)^2 dz = \frac{\int_0^h z\left((h-z)\frac{a}{h}\right)^2 dz}{\int_0^h \left((h-z)\frac{a}{h}\right)^2 dz} = h\frac{\int_0^1 u(1-u)^2 du}{\int_0^1 (1-u)^2 du} \qquad (1C.3)$$

où $u=z/h$. La suite n'est qu'un calcul :

$$z_G = h\frac{\int_0^1 (1-u)^2 u dz}{\int_0^1 (1-u)^2 dz} = h\frac{\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-2\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = h\frac{\frac{6-8+3}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{h}{4} \qquad (1C.4)$$

Exercice 2C:



Soit M la masse du système (les deux sphères) et R le rayon de chaque sphère. On connaît le moment d'inertie I_0 d'une sphère par rapport à l'axe Δ_0 passant par le centre :

$$I_0 = \frac{2}{5}\frac{M}{2}R^2 = \frac{MR^2}{5} \qquad (2C.1)$$

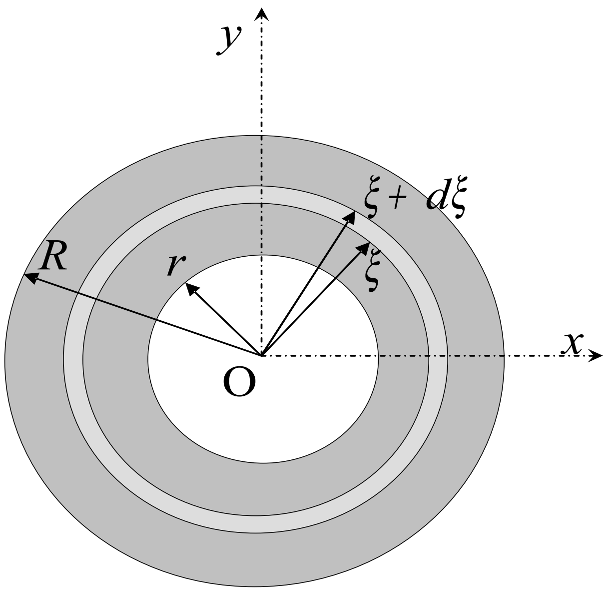
Le moment d'inertie J par rapport à l'axe Δ situé à une distance R de Δ_0 est obtenu en utilisant la règle de Steiner-Huygens :

$$J = I_0 + \frac{M}{2}R^2 = \frac{1}{5}MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \frac{7}{10}MR^2 \qquad (2C.2)$$

Comme nous avons deux sphères, le moment d'inertie I du système par rapport à Δ est :

$$I = \frac{7}{5}MR^2 \qquad (2C.3)$$

Exercice 3C:



Soit e l'épaisseur de notre roue homogène. Sa masse volumique est :

$$\rho = \frac{M}{\pi\,(R^2 - r^2)e} \qquad \text{(3C.1)}$$

Pour calculer le moment d'inertie I par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de la roue passant par son centre, découpons notre roue en petits anneaux élémentaires situés entre ξ et $\xi + d\xi$. Le petit volume dV délimité par ces anneaux est $2\pi\xi d\xi$. On a alors :

$$I = \int \rho\, r^2 dV = \rho \int_r^R \xi^2 2\pi e \xi\, d\xi = \frac{M}{\pi\,(R^2 - r^2)e} 2\pi e \int_r^R \xi^3 d\xi = \frac{M}{(R^2 - r^2)} \frac{R^4 - r^4}{2} \qquad \text{(3C.2)}$$

d'où :

$$I = \frac{1}{2} M\left(R^2 + r^2\right) \qquad \text{(3C.3)}$$

On retrouve bien le moment d'inertie du cylindre homogène par rapport à son axe $1/2MR^2$ pour r=0.