MASTER STEP Institut de Physique du Globe de Paris

Géophysique de l'Environnement

GE2008 TD1

Corrigé des exercices pour le 15 avril 2008

E1:

La profondeur de pénétration pour une onde de période T est donnée par $\lambda = \sqrt{\kappa T / \pi}$ où κ est la diffusivité thermique. Pour l'onde annuelle (T=3.16×10^{7} s) et κ=1.5×10^{-6} m^{2}·s^{-1}, on obtient λ= 3.9 m. L'atténuation à une profondeur p est $e^{-p/\lambda}$, ce qui donne 0.076, 5.8×10^{-3} et 4.4×10^{-4} à 10 m, 20 m et 30 m respectivement. Quant au décalage de phase, il est donné par $p/2\pi\lambda$ en unités de période, soit 0.41, 0.82 et 1.23, ou encore 5, 10 et 14 mois à 10 m, 20 m et 30 m respectivement.

E2:

L'amplitude annuelle crête crête à Paris est environ 15 °C. Pour que l'amplitude à une profondeur p soit 0.1 °C, il faut donc que l'atténuation $e^{-p/\lambda}$ soit égale à 6.7×10^{-3}. La profondeur de pénétration λ pour une onde de période T est $\lambda = \sqrt{\kappa T / \pi}$, soit 3.2 m avec T=3.16×10^{7} s et en prenant κ=10^{-6} m^{2}·s^{-1}. La profondeur p minimale est alors p=-λ×Log(6.7×10^{-3}) soit p= 16 m.

E3:

Comme le hangar est abrité de la pluie, supposons que la saturation du sous-sol en eau est de 50 %. Le coefficient de diffusion effectif D_{eff} du sel dans ce milieu est alors approximativement de l'ordre de 0.05×2×10^{-9} m^{2}·s^{-1}=10^{-10} m^{2}·s^{-1}. Si le sel a diffusé sur une longueur L, par argument dimensionnel, en l'absence d'information plus précise, l'ordre de grandeur de la durée τ est donné par:

$$\tau \approx \frac{L^2}{D_{eff}} = \frac{0.5^2}{10^{-10}} s = \frac{10^{10}}{4} s = \frac{10^{10}}{4 \times 3 \times 10^7} = \text{83 ans}. \tag{1}$$

E4:

Le débit Q à travers le filtre est donné par KAh/l, K étant la conductivité hydraulique, A l'aire totale du filtre (soit $A=\pi r_0^2$ ou r_0 est le rayon du filtre), h la charge hydraulique et l la longueur du filtre. Comptons la charge hydraulique à partir du bas du filtre, on ne tient donc pas compte d'une éventuelle rétention capillaire du filtre. Quand le filtre est plein ($h=h_1$=10+2=12 cm), on obtient Q=10^{-3}×π×4×10^{-4}×12/2=7.5×10^{-6} m^{3}/s soit Q=450 mL/min.

Le débit à travers le filtre est aussi égal à $A(t)dh/dt$, où $A(t)$ est l'aire de la surface libre. Si on suppose que la cafetière est cylindrique, alors $A(t)=\pi r(h)^2$ où $r(h)$ est le rayon de la surface libre. Ici, $r(h)=r_0+\tan\alpha\times(h(t)-l)$, où α est le demi-angle au sommet de la cafetière supposée conique. On a donc :

$$Q = K\pi r_0^2 \frac{h}{l} = -\pi \left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}} \right)^2 \frac{dh}{dt}, \qquad (1)$$

car α=30°, soit:

$$\frac{Kr_0^2}{l} dt = - \frac{\left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} h \left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right) + \frac{h^2}{3}}{h} dh . \qquad (2)$$

L'eau aura entièrement percolé au bout d'un temps T qui correspond à h variant de h_1 à l. En intégrant (2) de t=0 à T, on obtient donc:

$$\frac{Kr_0^2}{l} T = \left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2 Log \frac{h_1}{l} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right) (h_1 - l) + \frac{1}{6} \left(h_1^{\,2} - l^2 \right), \qquad (3)$$

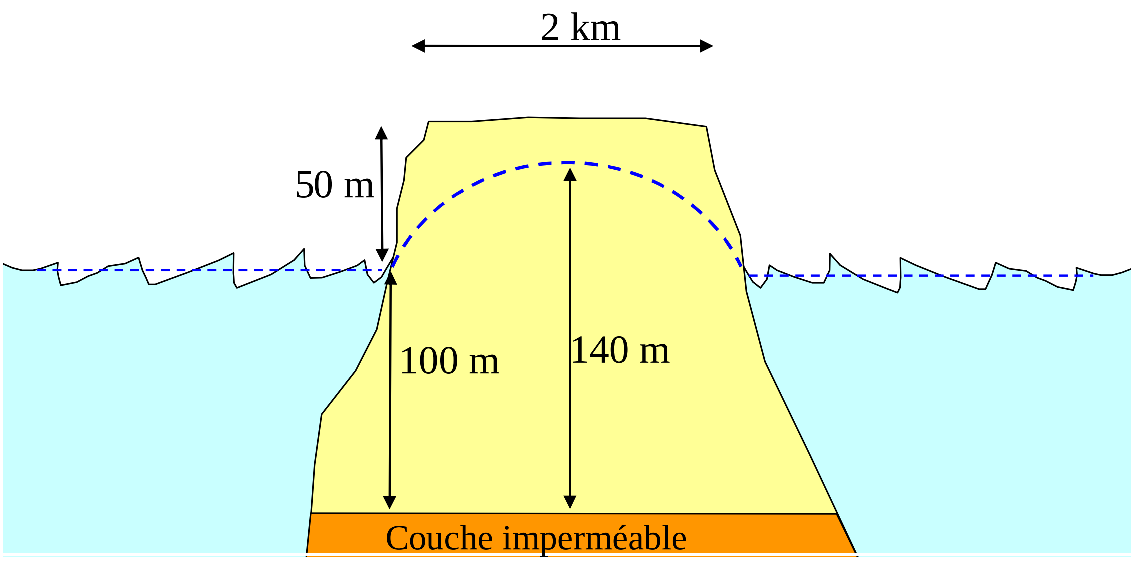
soit:

$$T = \frac{l}{Kr_0^2} \left[\left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2 Log \frac{h_1}{l} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(r_0 - \frac{l}{\sqrt{3}} \right) (h_1 - l) + \frac{1}{6} \left(h_1^{\,2} - l^2 \right) \right], \qquad (4)$$

soit:

$$T = 3.0 \text{ min} \qquad (5)$$

E5:



1) Considérons l'aquifère libre délimitée par la mer de par et d'autre. La hauteur piézométrique h est donc $h=h_0$=100 m pour x=0 (coordonnée horizontale perpendiculaire à la presqu'île et $x=L$ (largeur de la presqu'île). La ligne de partage des eaux x_{WD} est au centre de la presqu'île et $h(x_{WD})$=140 m. Soit a l'infiltration par tranche de presqu'île, que nous supposerons constante et égale à 1% de la pluviométrie. La conservation de la quantité totale d'eau contenue dans les pores permet d'écrire:

$$a = \frac{dq}{dx}, \qquad (1)$$

où q est le débit spécifique. Dans le cadre de l'approximation de Dupuit, on a :

$$q = -Kh \frac{dh}{dx}, \qquad (2)$$

où K est la conductivité hydraulique.

On a donc :

$$\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right) = -\frac{a}{K}\ . \qquad (3)$$

Cette équation s'intègre aisément quand le milieu est homogène (K=Cte) et a est constant et la solution vérifiant les conditions aux limites est:

$$h^2 = h_0^2 + \frac{a}{K}x(L-x)\ . \qquad (4)$$

La hauteur piézométrique au centre est alors:

$$h_{\max}^2 = h_0^2 + \frac{a}{K}\frac{L^2}{4}\ . \qquad (5)$$

On peut déduire la valeur de la conductivité hydraulique en fonction des autres paramètres:

$$K = \frac{a}{4}\frac{L^2}{h_{\max}^2 - h_0^2}, \qquad (6)$$

ce qui donne K=1/4×30×10^{-3}/(3.16×10^{7})×4×10^{6}/(140^{2}-100^{2}) m/s=10^{-7} m/s. Cette valeur correspond à une perméabilité de 10 mD.

2) On est ici dans le cas d'un problème de diffusion à une dimension. La diffusivité κ est ici la diffusivité hydraulique donnée par $\kappa = Kh_0/\varepsilon$, où ε est la porosité. La profondeur de pénétration (ou longueur de diffusion) λ pour une onde de période T est alors donnée par $\lambda = \sqrt{\kappa T/\pi}$ et l'atténuation à une profondeur p est $e^{-p/\lambda}$. Or l'atténuation indiquée pour la marée M2 avec p=2 m est 1/5. On a donc λ=2/Log5=1.24 m. La conductivité hydraulique est alors : $K=\varepsilon\pi\lambda^2/h_0T$=0.05×$\pi$×1.24^{2}/100/(12.42×3600) m/s=0.54×10^{-7} m/s, soit 5.4 mD. Cette valeur ne coïncide pas exactement avec la valeur obtenue précédemment mais elle est du même ordre de grandeur.

E6:

Dans l'approximation de Dupuit, le débit Q dans un forage de rayon r_0 où on observe un rabattement h_0 est lié au rabattement h_1 observé à une distance r_1 par :

$$Q = \pi K\frac{h_1^2 - h_0^2}{Log\,\frac{r_1}{r_0}}, \qquad (1)$$

où K est la conductivité hydraulique.

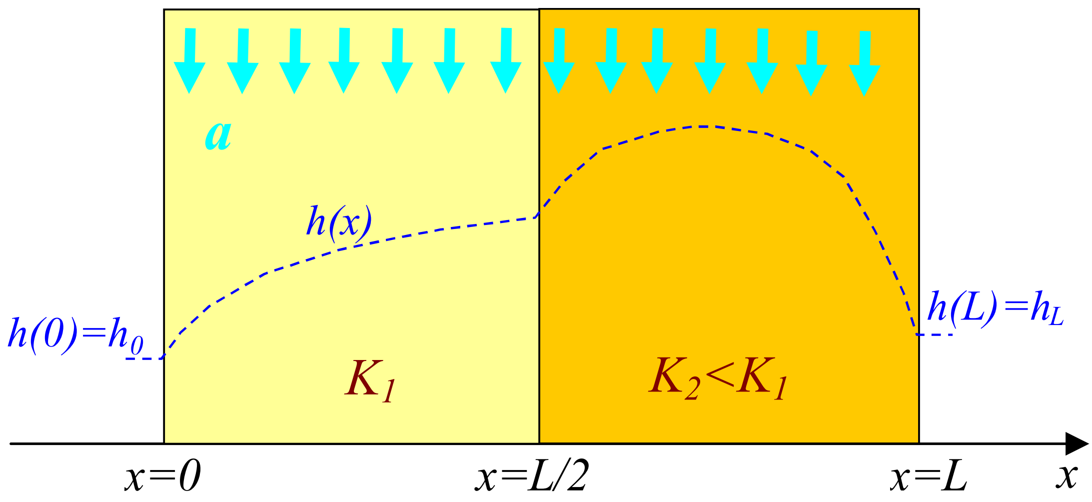
On a donc ici K=10^{-3}/π×Log(15/0.1)/(12.7^{2}-12.3^{2})=16×10^{-5} m/s, soit une perméabilité de 16 D.

E7:

Dans l'approximation de Dupuit (voir ci-dessus), la hauteur piézométrique $h(x)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right) = -\frac{a}{K}, \qquad (1)$$

où K est la conductivité hydraulique et a l'infiltration.



Dans le cas où a ne dépend pas de la position, cette équation s'intègre :

$$h_1^2 = -\frac{a}{K_1}x^2 + A_1 x + B_1 \, , \tag{2}$$

dans le milieu 1 ($0<x<L/2$) et :

$$h_2^2 = -\frac{a}{K_2}x^2 + A_2 x + B_2 \, , \tag{3}$$

dans le milieu 2 ($L/2<x<L$), A_1, B_1, A_2 *et* B_2 étant des constantes. Les valeurs des constantes sont imposées par les conditions aux limites. On a d'abord une contrainte à chaque bord: $h_1(0)=h_0$ et $h_2(L)=h_L$. On a en outre une relation de continuité de $h(x)$ à la frontière entre les deux milieux : $h_1(L/2)=h_2(L/2)$. Ces trois conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} B_1 = h_0^2 \\ B_2 = h_L^2 - A_2 L + \dfrac{a}{K_2}L^2 \\ -\dfrac{a}{K_1}\dfrac{L^2}{4} + A_1\dfrac{L}{2} + B_1 = -\dfrac{a}{K_2}\dfrac{L^2}{4} + A_2\dfrac{L}{2} + B_2 \end{cases} . \tag{4}$$

Enfin, on peut écrire la conservation du flux d'eau à la frontière entre les deux milieux, autrement dit :

$$-K_1 h_1 \left.\frac{dh_1}{dx}\right|_{x=L/2} = -K_2 h_2 \left.\frac{dh_2}{dx}\right|_{x=L/2} \, , \tag{5}$$

ce qui s'écrit :

$$K_1 \left.\frac{dh_1^{\,2}}{dx}\right|_{x=L/2} = K_2 \left.\frac{dh_2^{\,2}}{dx}\right|_{x=L/2} \, , \tag{6}$$

ou encore, en utilisant (2) et (3) :

$$K_1\left(-\frac{2a}{K_1}\frac{L}{2} + A_1\right) = K_2\left(-\frac{2a}{K_2}\frac{L}{2} + A_2\right), \tag{7}$$

soit : $K_1A_1=K_2A_2$. En injectant cette relation dans la troisième équation de (4), il vient :

$$-\frac{a}{K_1}\frac{L^2}{4} + \frac{K_2}{K_1}A_2\frac{L}{2} + h_0^2 = -\frac{a}{K_2}\frac{L^2}{4} + A_2\frac{L}{2} + \left(h_L^2 - A_2 L + \frac{a}{K_2}L^2\right) \tag{8}$$

$$A_2 \frac{L}{2}\frac{K_2+K_1}{K_1} = h_L^2 - h_0^2 + a\frac{L^2}{4}\left(\frac{3}{K_2}+\frac{1}{K_1}\right) \quad (9)$$

$$A_2 = \frac{2}{L}\frac{K_1\left(h_L^2-h_0^2\right)+a\frac{L^2}{4}\left(1+3\frac{K_1}{K_2}\right)}{K_1+K_2} \quad (10)$$

On obtient alors :

$$A_1 = \frac{K_2}{K_1}\frac{2}{L}\frac{K_1\left(h_L^2-h_0^2\right)+a\frac{L^2}{4}\left(1+3\frac{K_1}{K_2}\right)}{K_1+K_2} \quad (11)$$

et :

$$B_2 = h_L^2 - 2\frac{K_1\left(h_L^2-h_0^2\right)+a\frac{L^2}{4}\left(1+3\frac{K_1}{K_2}\right)}{K_1+K_2} + \frac{a}{K_2}L^2 \,. \quad (12)$$

La ligne de partage des eaux se situe dans le milieu ayant la plus faible conductivité hydraulique, 2 ici. Dans ce milieu 2, la ligne de partage des eaux est définie par :

$$\left.\frac{dh_2^2}{dx}\right|_{x=x_{WD}} = 0 \,, \quad (13)$$

soit :

$$-\frac{2a}{K_2}x_{WD} + A_2 = 0 \,. \quad (14)$$

On a donc :

$$\boxed{x_{WD} = \frac{1}{L}\frac{K_1K_2\frac{h_L^2-h_0^2}{a}+\frac{L^2}{4}\left(K_2+3K_1\right)}{K_1+K_2}} \,. \quad (15)$$

Pour $h_0 = h_L$, on a :

$$x_{WD} = \frac{L}{2} + \frac{L}{4}\frac{K_1-K_2}{K_1+K_2} \,. \quad (16)$$

La hauteur maximale de l'aquifère est :

$$h_{\max}^2 = -\frac{a}{K_2}{x_{WD}}^2 + A_2 x_{WD} + h_L^2 - A_2 L + \frac{a}{K_2}L^2 \,, \quad (17)$$

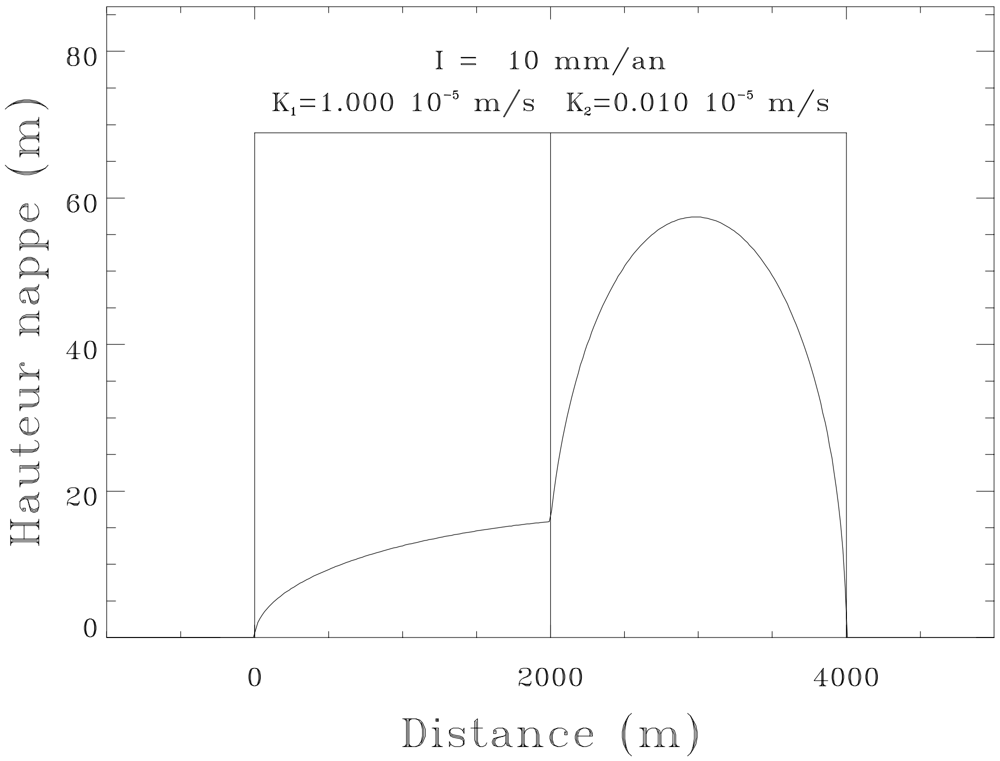
soit, en exprimant A_2 en fonction de x_{WD} (équation 14) :

$$h_{\max}^2 = -\frac{a}{K_2}{x_{WD}}^2 + 2\frac{a}{K_2}{x_{WD}}^2 + h_L^2 - 2\frac{a}{K_2}x_{WD}L + \frac{a}{K_2}L^2 \,. \quad (18)$$

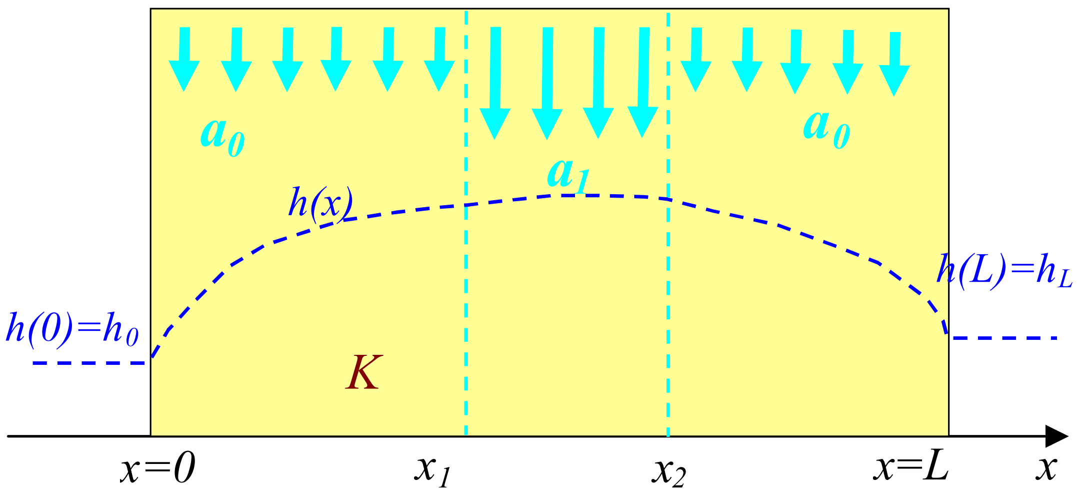
On a donc :

$$\boxed{h_{\max}^2 = h_L^2 + \frac{a}{K_2}\left(L - x_{WD}\right)^2} \,. \quad (19)$$

Cette relation est d'ailleurs tout à fait générale.
Un exemple de cas est représenté sur la figure ci-dessous:



E8:



Commençons par le cas d'une segmentation du massif en trois zones 1, 2 et 3 d'infiltration constante $I_1=a_0$, $I_2= a_0$ et $I_3=a_0$. Dans l'approximation de Dupuit (voir ci-dessus), la hauteur piézométrique $h_i(x)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d}{dx}\left(h_i\frac{dh_i}{dx}\right)=-\frac{I_i}{K}, \qquad (1)$$

où K est la conductivité hydraulique. Dans le cas où I_i ne dépend pas de la position, cette équation s'intègre :

$$h_i^2=-\frac{I_i}{K}x^2+A_ix+B_i\ , \qquad (2)$$

où A_i et B_i sont des constantes.

Pour trouver les six constantes, on écrit d'abord les conditions aux bornes:

$$\begin{cases} h_0^2 = B_1 \\ h_L^2 = -\dfrac{I_3}{K}L^2 + A_3 L + B_3 \end{cases} . \qquad (3)$$

On écrit ensuite la continuité de la hauteur et du flux à chaque frontière de zone. Pour la limite entre la zone 1 et la zone 2 ($x=x_1$), on a:

$$\begin{cases} -\dfrac{I_1}{K}x_1^{\,2} + A_1 x_1 + B_1 = -\dfrac{I_2}{K}x_1^{\,2} + A_2 x_1 + B_2 \\ -2\dfrac{I_1}{K}x_1 + A_1 = -2\dfrac{I_2}{K}x_1 + A_2 \end{cases} . \qquad (4)$$

et, pour la limite entre la zone 2 et la zone 3 ($x=x_2$), on a:

$$\begin{cases} -\dfrac{I_2}{K}x_2^{\,2} + A_2 x_2 + B_2 = -\dfrac{I_3}{K}x_2^{\,2} + A_3 x_2 + B_3 \\ -2\dfrac{I_2}{K}x_2 + A_2 = -2\dfrac{I_3}{K}x_2 + A_3 \end{cases} . \qquad (5)$$

On remarque qu'en multipliant la deuxième équation de (5) par $-x_1$ et en ajoutant à la première, on obtient:

$$\frac{I_1}{K}x_1^{\,2} + B_1 = \frac{I_2}{K}x_1^{\,2} + B_2 , \qquad (6)$$

soit:

$$B_2 = h_0^2 + \frac{I_1 - I_2}{K}x_1^{\,2} . \qquad (7)$$

De même:

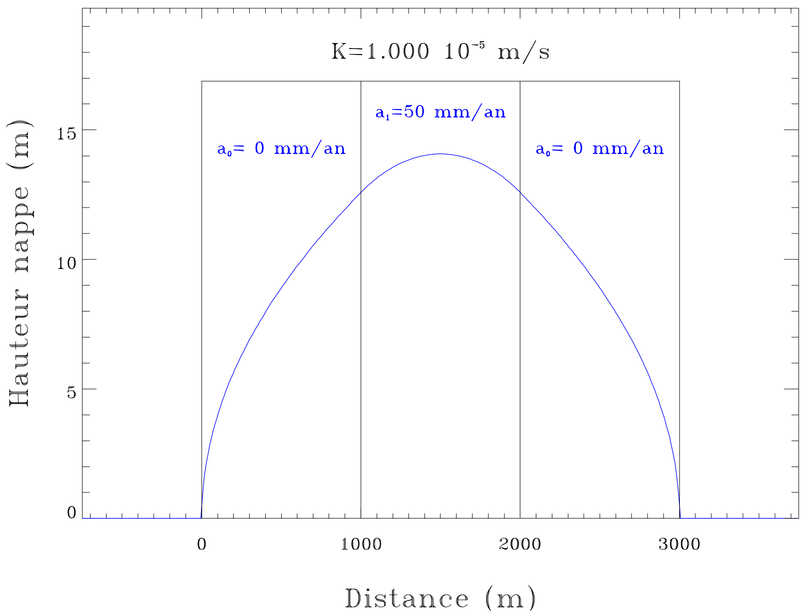
$$B_3 = B_2 + \frac{I_2 - I_3}{K}x_2^{\,2} = h_0^2 + \frac{I_1 - I_2}{K}x_1^{\,2} + \frac{I_2 - I_3}{K}x_2^{\,2} . \qquad (8)$$

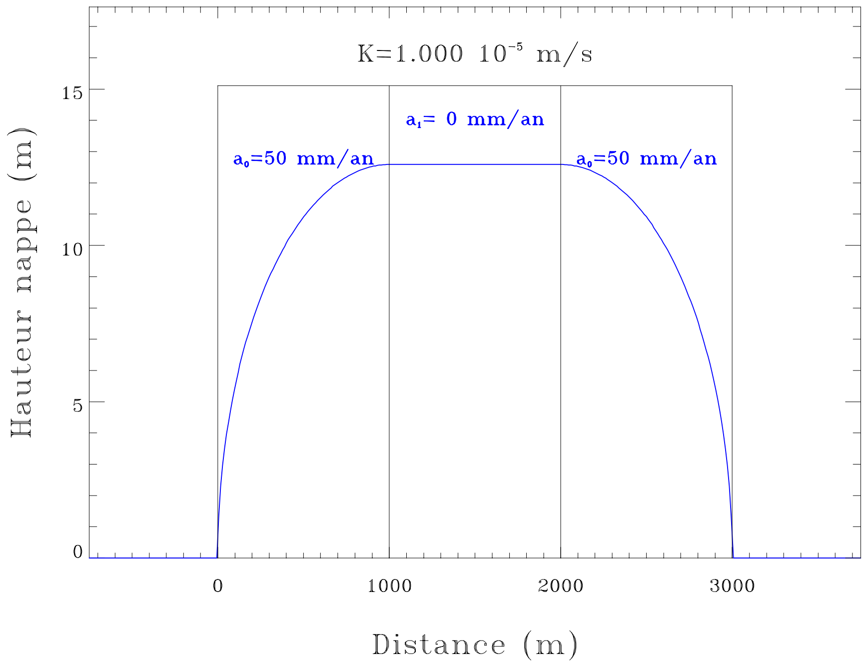
On obtient alors A_3 à partir de la deuxième équation de (5) :

$$A_3 = \frac{1}{L}\left(h_L^2 + \frac{I_3}{K}L^2 - B_3 \right) ; \qquad (9)$$

puis A_2 et A_1 s'obtiennent successivement des deuxièmes équations de (4) et (5).

Deux exemples sont représentés dans les figures suivantes.





Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un milieu homogène de conductivité hydraulique K avec une infiltration $a(x)$ variant avec la position comme $a_0 \sin^2(x\pi/L)$. On a:

$$\frac{d^2h^2}{dx^2} = -\frac{2a}{K} = -\frac{2a_0}{K}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) = -\frac{2a_0}{K}\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2} = -\frac{a_0}{K} + \frac{a_0}{K}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \quad (10)$$

L'intégration est alors immédiate:

$$h^2 = -\frac{a_0}{2K}x^2 + Ax + B - \frac{a_0}{K}\frac{L^2}{4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \quad (11)$$

où A et B sont deux constantes:

Les conditions aux bornes imposent:

$$\begin{cases} h_0{}^2 = B - \dfrac{a_0}{K}\dfrac{L^2}{4\pi^2} \\ h_L{}^2 = -\dfrac{a_0}{2K}L^2 + AL + B - \dfrac{a_0}{K}\dfrac{L^2}{4\pi^2} \end{cases}. \quad (12)$$

d'où on tire:

$$\begin{cases} A = \dfrac{a_0}{2K}L + \dfrac{h_L{}^2 - h_0{}^2}{L} \\ B = h_0{}^2 + \dfrac{a_0}{K}\dfrac{L^2}{4\pi^2} \end{cases}. \quad (13)$$

La forme de la nappe est alors :

$$h^2 = -\frac{a_0}{2K}x^2 + \left(\frac{a_0}{2K}L + \frac{h_L{}^2 - h_0{}^2}{L}\right)x + h_0{}^2 + \frac{a_0}{K}\frac{L^2}{4\pi^2} - \frac{a_0}{K}\frac{L^2}{4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \quad (14)$$

ou :

$$h^2 = h_0{}^2 + \frac{a_0}{2K}x(L-x) + \frac{h_L{}^2 - h_0{}^2}{L}x + \frac{a_0}{K}\frac{L^2}{2\pi^2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (15)$$

Dans le cas où $h_0 = h_L = 0$, on a :

$$h^2 = \frac{a_0}{2K}\left[x(L-x)+\frac{L^2}{\pi^2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]. \qquad (16)$$

La hauteur maximale de la nappe sera alors ($x=L/2$) :

$$h_{\max} = \sqrt{\frac{a_0}{K}}\frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi^2+4}{2}}. \qquad (17)$$

E9:

Soit Q le débit de pompage dans ce puits de rayon r_0, et h_0 la hauteur d'eau dans le puits à l'équilibre. On a:

$$Q = \pi K \frac{H_0^{\ 2} - h_0^{\ 2}}{Log\frac{R}{r_0}}, \qquad (1)$$

où H_0 est la hauteur de la nappe avant pompage, K la conductivité hydraulique et R le rayon d'influence du pompage. Prenons dans un premier temps R=60 m. On souhaite pomper le plus possible dans ce puits, donc on va supposer qu'on se place à la limite de Sichardt. Le débit est alors:

$$Q = 2\pi r_0 h_0 \frac{\sqrt{K}}{15}. \qquad (2)$$

En égalisant les deux expressions du débit, on obtient une équation du deuxième degré pour h_0:

$$\sqrt{K}\frac{H_0^{\ 2} - h_0^{\ 2}}{Log\frac{R}{r_0}} = h_0\frac{2r_0}{15}, \quad \text{soit:} \qquad (3)$$

$$h_0^{\ 2} + h_0\frac{2r_0}{15\sqrt{K}}Log\frac{R}{r_0} - H_0^{\ 2} = 0 \qquad (4)$$

dont la solution positive est:

$$h_0 = -\frac{r_0}{15\sqrt{K}}Log\frac{R}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{r_0}{15\sqrt{K}}Log\frac{R}{r_0}\right)^2 + H_0^{\ 2}}. \qquad (5)$$

On obtient h_0=2 m. Si on utilise maintenant cette valeur pour estimer le rayon d'influence R en utilisant la formule de Sichardt, on obtient:

$$R = 3000\times 8\times\sqrt{10^{-5}} = 76 \quad \text{m}. \qquad (6)$$

On obtient alors h_0=1.9 m en utilisant cette nouvelle valeur dans (6). On vérifie ainsi que le résultat dépend peu de l'hypothèse sur le rayon d'influence.

Le débit de pompage est alors:

$$Q = 2\pi r_0 h_0\frac{\sqrt{K}}{15} = 2\pi\times 0.2\times 2\frac{\sqrt{10^{-5}}}{15} = 46 \text{ m}^3/\text{jour}. \qquad (7)$$

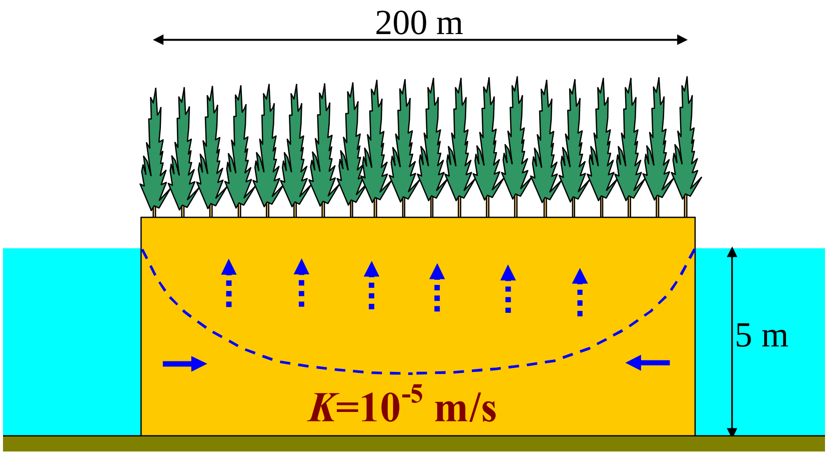
Or le besoin d'eau du village est de $30\times10^{-3}\times2000$=60 m^3/jour. On constate que même à son taux de pompage maximum, ce puits ne peut pas suffire pour alimenter le village.

E10:

On utilise la formule de la décharge de Dupuit-Forchheimer (équation 2.23 du chapitre 2):

$$Q=\frac{3\times10^{3}\times10^{-7}}{2\times50}\left(50^{2}-40^{2}\right)=\frac{3\times10^{-4}\times10\times90}{100}=2.7\ \text{L/s}. \qquad (1)$$

E11:



Si on a un peuplier par 100 m^2, alors le taux d'évaporation est:

$$e=\frac{100\times10^{-3}}{10^{5}\times100}=10^{-8}\ \text{m/s}. \qquad (1)$$

L'équation d'équilibre de l'aquifère libre est :

$$h^{2}=-\frac{a}{K}x^{2}+Ax+B, \qquad (2)$$

où A et B sont des constantes et a=-e. Les constantes sont imposées par le fait que le niveau est donné égal à h_0=5 m pour x=-$L/2$ et x=$L/2$, soit:

$$\begin{cases} h_0^{2}=-\dfrac{a}{K}\dfrac{L^{2}}{4}-A\dfrac{L}{2}+B \\ h_0^{2}=-\dfrac{a}{K}\dfrac{L^{2}}{4}+A\dfrac{L}{2}+B \end{cases}. \qquad (3)$$

On obtient:

$$\begin{cases} A=0 \\ B=h_0^{2}+\dfrac{a}{K}\dfrac{L^{2}}{4} \end{cases}. \qquad (4)$$

La forme de l'aquifère est donc:

$$h(x)=\sqrt{h_0^{2}-\frac{eL^{2}}{4K}+\frac{e}{K}x^{2}}. \qquad (5)$$

C'est un arc d'hyperbole dont le minimum est:

$$h_{\min}=\sqrt{h_0^{2}-\frac{eL^{2}}{4K}}=\sqrt{25-\frac{10^{-8}\times4\times10^{4}}{10^{-5}\times4}}=\sqrt{25-10}=3.9\ \text{m}. \qquad (6)$$

E12:

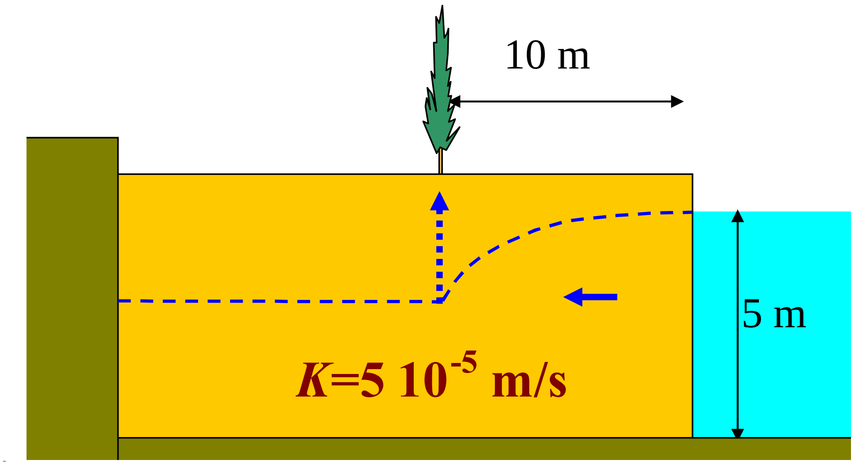
Soit q le débit spécifique circulant dans la nappe libre, compté positivement. Il est égal au débit emporté par l'allée des peupliers, soit:

$$q=\frac{100\times10^{-3}}{2\times10^{5}}=5\times10^{-7}\ \text{m}^3\text{/s}. \qquad (1)$$

Le débit spécifique est par ailleurs donné par l'approximation de Dupuit:

$$q = Kh\frac{dh}{dx}, \qquad (2)$$

où K est la conductivité hydraulique et $h(x)$ la forme de la hauteur piézométrique en fonction de la coordonnée x perpendiculaire à la rivière.



On obtient donc une équation différentielle pour $h(x)$:

$$\frac{q}{K}dx = \frac{1}{2}dh^2, \qquad (3)$$

qui s'intègre facilement entre $x=0$ (allée de peuplier) et $x=L$ (rivière):

$$\frac{q}{K}L = \frac{1}{2}\left(H_0{}^2 - h_0{}^2\right), \qquad (4)$$

où H_0 est le niveau d'eau dans la rivière et h_0 le niveau d'eau sous les peupliers. On remarque que le niveau d'eau demeure constant égal à h_0 au-delà des peupliers, puisqu'il n'y a pas d'autre source d'alimentation ou de perte d'eau. On a donc:

$$h_0 = \sqrt{H_0{}^2 - \frac{2qL}{K}} = \sqrt{25 - \frac{2\times5\times10^{-7}\times10}{5\times10^{-5}}} = \sqrt{24.8} = 4.97 \text{ m}. \qquad (5)$$

On a donc un rabattement de 3 cm, ce qui ne fait pas beaucoup… Il est cependant vraisemblable que le modèle ci-dessus, qui suppose que les peupliers vont puiser l'eau directement sous leur tronc, est trop sommaire. Les racines iront probablement chercher l'eau horizontalement, éventuellement en puisant directement dans l'eau au bord des berges…

E13:

On a ici un processus de diffusion que nous supposerons de dimension 1 dans un milieu homogène. Soit la longueur de diffusion. L'atténuation observée de l'onde M2 est 44/80. On a donc:

$$e^{-\frac{5}{\lambda}} = \frac{44}{80}, \qquad (1)$$

soit:

$$\lambda = \frac{5}{Log\frac{80}{44}} \cong 8.4 \text{ m}. \qquad (2)$$

Mais la longueur de diffusion est donnée par :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\kappa_h \tau}{\pi}}, \qquad (3)$$

où τ est la période et κ_h la diffusivité hydraulique. Mais la diffusivité hydraulique est:

$$\kappa_h = \frac{KH}{\phi}, \qquad (4)$$

où K est la conductivité hydraulique, H la hauteur moyenne de la nappe et ϕ la porosité. On a donc:

$$H = \frac{\kappa_h \phi}{K} = \frac{\phi \lambda^2 \pi}{K\tau}. \qquad (5)$$

En prenant une conductivité hydraulique de 1 D et une porosité de 20 % (typiques pour les milieux sableux), on obtient $H \cong 100$ m.

E14:

Le débit de pompage Q dans un forage de rayon r_0 et de rayon d'influence R est donné par:

$$Q = \pi K \frac{\left(H_0^{\ 2} - h_0^{\ 2}\right)}{Log \frac{R}{r_0}}, \qquad (1)$$

où K est la conductivité hydraulique, H_0 le niveau d'équilibre de la nappe avant pompage et h_0 le niveau dans le forage à l'équilibre pendant le pompage. Le rayon d'influence est donné par la formule de Sichardt:

$$R(\mathrm{m}) = 3000\left(H_0 - h_0\right)\sqrt{K} = 3000 \times 50 \times \sqrt{10^{-5}} \cong 474 \text{ m}. \qquad (2)$$

Le débit est donc:

$$Q = \pi K \frac{\left(H_0^{\ 2} - h_0^{\ 2}\right)}{Log \frac{R}{r_0}} = \pi \times 10^{-5} \times \frac{100^2 - 50^2}{Log \frac{474}{0.1}} \cong 28 \text{ L/s}. \qquad (3)$$

Cependant, le débit critique Q_c dans ce forage est:

$$Q_c = 2\pi r_0 h_0 \frac{\sqrt{K}}{15} = 2\pi \times 0.1 \times \frac{\sqrt{10^{-5}}}{15} \cong 6.6 \text{ L/s}. \qquad (4)$$

Le débit de pompage nécessaire pour maintenir un rabattement de 50 m est donc largement supérieur au débit critique. Il n'est donc pas raisonnable de faire cette opération; le forage va se colmater.

E15:

Le débit spécifique à travers les digues étant conservé, on a, d'après la formule de la décharge de Dupuit-Forchheimer (équation 2.22 du chapitre 2) :

$$\frac{h_0^2 - h_1^2}{L} = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L} = \frac{h_2^2 - h_3^2}{L/2}, \qquad (1)$$

soit:

$$\begin{cases} h_0^2 - h_1^2 = \dfrac{h_1^2 - h_2^2}{2} \\ h_1^2 - h_2^2 = 4h_2^2 \end{cases}. \qquad (2)$$

On en déduit:

$$\begin{cases} h_1^2 = 5h_2^2 \\ h_0^2 = \dfrac{3h_1^2 - h_2^2}{2} = 7h_2^2 \end{cases}, \qquad (3)$$

soit:

$$\boxed{\begin{cases} h_1 = \sqrt{\dfrac{5}{7}}h_0 \\ h_2 = \dfrac{1}{\sqrt{7}}h_0 \end{cases}}. \qquad (4)$$

E16:

Le niveau maximum h_{max} d'une nappe phréatique dans un milieu de largeur typique L, de conductivité hydraulique K et d'infiltration a est (chapitre 2 équation 2.43):

$$h_{\max} = \sqrt{\frac{a}{K}}\frac{L}{2}. \qquad (1)$$

En prenant une perméabilité de 1 D, une infiltration de 1 % la pluviométrie, soit 6 mm par an dans la région parisienne, on obtient:

$$h_{\max} = \sqrt{\frac{6\times 10^{-3}}{3\times 10^{7}\times 10^{-5}}}1000 \cong 4 \text{ m}. \qquad (2.44)$$

Il est donc peu vraisemblable que le niveau d'eau environ 26 m plus haut soit le toit de l'aquifère. Il s'agit probablement d'une petite aquifère perchée très localisée, sans intérêt pour l'exploitation agricole par exemple.