2 Les planétes et leurs trajectoires

2.1 Introduction

La vue la plus lointaine que l'on puisse avoir du systéme solaire est celle d'un ensemble de masses ponctuelles. La seule force qui les lient: la gravitation. C'est la gravitation qui est à l'origine de la condensation su systéme primitif, des trajectoires des planétes, et c'est également elle qui régira l'évolution lente du systéme planétaire. Les planétes comme masses ponctuelles: une vue bien restrictive peut tre mais déja pleine d'imprévus. Si pleine d'imprévus que l'on s'est aperut récemment [*Laskar*, 1989] que l'évolution de ce systéme ne pouvait tre modélisée, et que la trajectoire de certaines planétes devenaient chaotiques.

2.2 L'approximation Képlerienne

Il est donc nécessaire au premier abord de simplifier notre probléme. La premiére faon de faire est de négliger, pour une planéte donnée, l'action de toutes les autres planétes et de ne supposer que celle du soleil. Si l'on a plutt un systéme Terre-Lune, Pluton-Charon, on fait la mme chose, mais en considérant la trajectoire du centre de masse du systeme planéte+satellites. Cette approximation est l'approximation Keplérienne.
On considére donc le soleil, de masse M et notre planéte de masse m, toutes les deux ponctuelles. La force de gravitation peut alors s'écrire

$$\mathbf{f} = -\mathcal{G}\frac{M\ m\mathbf{u}}{r^2} \tag{1}$$

ou G est la constante d'attraction universelle: G = 6.67 10^-11 N m Kg^{-2}, M et m les masses des deux corps, r leur distance et $\mathbf{u}$ le vecteur unitaire les reliant. Si on applique la relation de la dynamique à la masse m, symbolisée par le point P, on a alors l'équation suivante:

$$m\frac{d^2\mathbf{OP}}{dt^2} = -\mathcal{G}M\ m\frac{\mathbf{MP}}{|PM|^3} \tag{2}$$

On peut résoudre cette équation en remarquant que

$$\mathbf{r} = \frac{M}{M+m}\mathbf{OP} \tag{3}$$

o $\mathbf{r} = \mathbf{MP}$. Cette équation conduit, en remarquant que le point O, centre de gravité du systéme, est immobile ou animé d'une vitesse constante, à l'équation

$$\mu\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mathcal{G}M\ m\frac{\mathbf{r}}{|r|^3} \tag{4}$$

o $\mu = \frac{m\ M}{M+m}$ est la masse réduite du systéme à deux corps. Pratiquement, cette masse est dans le cas des trajectoires de planétes autour du soleil, presque égale à la masse du soleil et le barycentre O est presque confondu avec le centre du soleil. Pour le coupe Terre-Lune par contre, la masse de la Terre n'est que 80 fois plus grande que celle de la Lune, de sorte que compte tenu de la distance entre la Terre et la Lune, le barycentre du systéme Terre-Lune se trouve en un point proche de la surface de la Terre. Dans l'équation (3), tout se passe alors comme si la masse M est immobile mais qu'elle agissait avec la masse $m + M$. Quelle est l'évolution du moment cinétique de la planéte P? On peut simplement écrire ce moment cinétique:

$$\mathcal{L} = \mathbf{OP} \text{ x } m\partial_t u \tag{5}$$

et l'on s'aperoit simplement à partir de l'équation (3) que ce moment cinétique est constant, la force étant appliquée paralement au rayon **OP**. On dit que la force est centrale.
On peut continuer à faire une analyse en temps de l'équation différentielle. En fait, il est plus interessant d'étudier la trajectoire, et pour cela de passer en coordonnées polaires. Dans ces coordonnées, nous avons:

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} &= r\mathbf{e}_r, & (6) \\ \partial_t\mathbf{OP} &= \dot{r}\mathbf{e}_r - r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, & (7) \end{aligned}$$

Ces deux premiéres relations permettent d'expliciter le moment cinétique de la planéte:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{OP}xm\partial_t OP & (8) \\ &= -r^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z == -mC\mathbf{e}_z & (9) \end{aligned}$$

Dans cette relation, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ forment un triedre direct et $C = r^2\dot{\theta}$, comme le moment cinétique est indépendant du temps, est constant. Cette constante s'appelle la constante des aires. En effet, à cause des proprietés du produit vectoriel, $\frac{\mathcal{L}}{\Updownarrow}$ correspond à deux fois l'aire balayée par la planéte durant l'unité de temps, et correspond donc à la vitesse aréolaire. Il est possible alors d'utiliser C pour exprimer vitesse et accélération en fonction des dérivées non pas par rapport au temps, mais par rapport à la variable θ. On obtient alors:

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} &= r\mathbf{u}, & (10) \\ \partial_t\mathbf{OP} &= C[u\mathbf{e}_\theta - \partial_\theta u\mathbf{e}_r] & (11) \\ \partial_t^2\mathbf{OP} &= -C^2u^2[u + \partial_\theta^2 u]\mathbf{e}_r & (12) \end{aligned}$$

o $u = 1/r$. Ces relations forment les deux relations de Binet. On peut maintenant exprimer l'equation différentielle de la trajectoire de la planéte, qui est finalement donnée par

$$\mu C^2u^2[u + \partial_\theta^2 u] = \mathcal{G}mMu^2 \tag{13}$$

d'o l'équation finale de la trajectoire

$$\partial_\theta^2 u + u = \frac{\mathcal{G}(M+m)}{C^2} \tag{14}$$

L'intégration de cette équation donne

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}[1 + ecos(\theta - \theta_0)] \tag{15}$$

C'est l'équation d'une conique de foyer M, d'excentricité e, de paramétre $p = \frac{C^2}{\mathcal{G}(M+m)}$. θ_0 est l'argument du periastre de la trajectoire. Lorsque l'excentricité e est inférieure à 1, il s'agit d'une ellipce et si $e = 0$, il s'agit d'un cercle. Dans le cas ou $e = 1$, nous avons une parabole et pour $e > 1$ une hyperbole. On peut réecrire la relation sous la forme

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + ecos(\theta - \theta_0)}. \tag{16}$$

Cette trajectoire est donc définie avec les paramétres suivant: • le demi-grand axe a ;
• l'excentricité e .
Remarque: l'excentricite est reliée au demi petit axe par la relation $e = c/a$, o $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Il faut aussi définir le plan sur lequel se déroule la trajectoire. Ceci est fait avec les paramétres:
• l'argument θ_0 du périhélie ou périastre;
et le plan sur lequel cette trajectoire est inscrite par les paramétres:
• l'inclinaison i du plan de l'orbite par rapport à un plan de référence (plan de l'ecliptique pour les planétes, par définition le plan de l'orbite terrestre ou le plan équatorial de la planéte pour les satellites) • la longitude Ω du noeud ascendant (qui est l'intersection entre la trajectoire de la planéte et le plan de référence, balayé du sud vers le nord).
Pour une trajectoire elliptique, le point le plus proche du foyer est le périgé de l'orbite, le point le plus lointain est l'apogée, tandis que la distance entre le centre de l'ellipse et son foyer est ae. La quasi totalité des planétes du systéme solaire ont une excentricité proche de 0 et donc une trajectoire quasi circulaire. Il y a quelques exceptions, en particulier Mercure et Pluton, qui ont une excentricité de 0.206 et 0.246. Dans le cas de Pluton, ceci signifie la dis entre le soleil et Pluton varie entre 29.70 UA et 48.96 UA. Le demi grand axe de Neptune étant de 30.109, et son excentricité presque nulle (e=0.009) ceci signifie que Neptune est parfois la planéte la plus éloignée du Soleil. Certaines cométes ainsi que les astéroides ont des trajectoires elliptiques. Parmis les objets ayant une trajectoire trés elliptique, on rencontre les astérodes Apollo-Amor. Ces astéroides ont des aphélies presques tous situés entre les orbites de Mars et de Jupiter, et pour beaucoup ont un périhélie inférieur à une UA Leur trajectoire coupe donc celle de la Terre, et mme celles de venus et de Mercure. L'astéroïde

1566 Icare approche par exemple le soleil à 0.19 UA et s'en éloigne à 1.19, tandis que 1978 SB s'en approche à 0.35 UA pour s'en éloigner à 4.11 UA, ce qui correspond à des trajectoires d'excentricité de 0.85. Ce sont ces objets qui ont donné naissance aux cratéres de plus de cinq kilométres qui existent sur la Terre, sur la Lune, Mercure et peut tre Mars, et qui sont utilisés comme chronométres chronologiques pour déterminer les ages des surfaces de ces planétes. On estime par exemple que prés de 400 tonnes de fragments d'objets Amor-Apollo, pesant entre 100g et une tonne doivent rentrer chaque année dans l'atmosphére de la Terre. De plus, pour un objet Apollo donné, la probabilité de collision est de l'ordre de 5 x 10^{-9} par an, ce qui donne environ une collision toute les 200 millions d'année. Si on suppose qu'il y a environ entre 750 et 1000 objets Apollo, la probabilité de collision serait donc environ de une collision tous les millions d'années. La quasi-totalité des fragments de météorites sont ainsi des restes d'objets Apollo-Amor

Pour une trajectoire parabolique, caractérise également la trajectoire avec:

• la distance périhélique q = a(1-e)

• la distance aphélique Q = a(1+e) . Les cométes non-périodiques sont des objets avec une trajectoire quasi-parabolique, qui semblent venir d'un réservoir appelé "nuage d'Oort" a quelques dizaines de millier d'UA.

2.3 les lois de Kepler

La demarche que nous venons d'effecter est l'inverse du cheminenement historique des idées. En effet, à partir des observations de Ticho-Brahé, Kepler fit une synthése des observations sous la forme de trois lois:

• La trajectoire des planétes est une ellipse dont le centre du soleil est l'un des foyers

• Au cours du mouvement, le rayon vecteur joignant le centre du soleil à la planéte décrit des aires égales en des temps égaux: c est la loi des aires

• le rapport des carrés des pérodes sur les cubes des demi grands axes est une constante. Exprimé avec a en UA et T en années, ceci donne:

$$\frac{T^2}{a^3} = 1 \tag{17}$$

On peut redemontrer la troisiéme relation à partir de nos résultats.

2.4 Loi de Titius-Bode

Il y a deux cents ans, l'allemand Johan Titius observa que les distances heliocentriques moyennes des planétes obeissait à une progression géométrique , dont la loi empirique est donnée par

$$D = 0.4 + 0.3x2^n \tag{18}$$

Cette relation devint trés populaire peu aprés la découverte d'Uranus en 1781. Johan Bode réussit alors à convaincre quelques astronomes de rechercher une planéte pour n=3, c'est à dire entre Mars (n=2) et Jupiter (n=4). Le miracle se produisit en 1801 avec la découverte de l'astéroide Céres. Par la suite, cette loie perdit de sa splendeur avec les découvertes de Neptune (1846) et de Pluton (1930), qui s'eccartent de cette loie de 22 % et 49% ! Par contre, on s'est aperut que la loie de Titius-Bode s'améliore si l'on prend une raison de 1.73, et que les satellites des planétes géantes suivent des lois similaires: la raison est de 1.57 pour les satellites de Jupiter, 1.54 pour Saturne, 1.45 pour Uranus et 1.8 pour Neptune! En fait, il est facile d'explique une telle loi si l'on admet que le disque proto-planétaire admet une invariance d'échelle: en autre termes si ce disque ce fragmente en grumeaux qui deviendront des planétes ou des satellites, on peut passer d'un amas à la distance R_n à un autre amas à la distance R_{n+1} par une dilatation de $K=R_{n+1}/R_n$. Si on a vraiment une invarience d'échelle, K ne doit pas dépendre de R_n, et les rayons des grumeaux, et donc des planétes forment une loi géométrique de raison K. La loi de Titius Bode n'est donc que le reflet des symétries axialles du disque proto-planétaire, et de l'invariance d'échelle. Il y a tellement de paramétres pouvant agir sur K qu'il est surement impossible de remonter par cette valeure uniquement à des contraintes sur les caractéristiques initales du disque. Par contre, tout modéle d'accrétion devra bien sur vérifier cette loi!

2.5 L'interaction des autres planétes et la transition vers le chaos

En fait, il n'est pas exacte de se limiter à un systéme à deux corps pour étudier les trajectoires dans le systéme solaire. En raison des interactions entre les planétes, les paramétres orbitaux ne sont pas constant dans le temps. Dans le cas des planétes, ces variations sont trés lentes: la longitude des noeuds tourne complétement en plusieurs dizaines de millier d'années.
SI on considére le probléme à trois corps Terre-Lune-Soleil, on met en évidence en fait 4 périodes caractéristiques:
• L'année Sidérale T_0, qui décrit le mouvement de la Terre autour du soleil, durée nécessaire pour que la Terre revienne se pointer vers une étoile fixe; $T_0 = 365.257$ jours, 20 minutes de plus que l'année tropicale, de l'équinoxe à l'équinoxe
• Le mois sidéral T_l, de 27.32166 jours, temps que met la Lune pour revenir pointer suivant une direction fixe (une étoile là aussi). Si on combine cette durée avec l'année sidérale, on obtient le mois synodic, durée entre deux pleines lunes(29.53059 jours)
• la durée entre deux passages au périgé, de T_2=27.55455 jours
• le mois nodical T_3=27.21222 jours, que met la lune pour repasser successivement entre deux noeuds ascendant.
Ces valeurs etaient connue avec une précision de 1 seconde par les grecs. On voit donc que les caractéres orbitaux qui étaient constant dans l'hypothése de

Kepler, ne le sont plus. On a une lente dérive du noeud ascendant, et une lente dérive du périgé: h diminue de 2 pi en 18 années, alors que $h+g$ augmente de 2 pi en 9 années.
Une des méthodes pour calculer cette évolution est la méthode dite de variation des constantes. Ces constantes sont a,e,γ,h,g,f. On peut alors écrire une équation d'évolution de ces constantes dans le temps, sous la forme

$$\frac{da}{dt} = K_a(a,e,\gamma,h,g,f), \frac{de}{dt} = K_e(a,e,\gamma,h,g,f), etc \tag{19}$$

Le probleme pour la lune est que certains paramétres varient trés peu, a par exemple, d autres varient beucoup plus comme e.
Pour les cométes et les astéroides, les perturbations sont beaucoup plus grandes. Reprenons l'exemple des astéroides Apollo-Amor. On pourrait imaginer que les 750-1000 objets soient les survivant d'une population à l'origine gigantesque. En fait, ce n'est pas le cas, car le flux de projectiles à l'origine des cratéres de la Lune est a peut prés constant depuis trois milliards d'années, et s'est mme légerement accru depuis 600 millions d'années. Les objets Appolo sont donc injecté à un flux environ constant chaque année, et en gros, il y aurait a peu prés 15 nouveaux astéroides de rayon supérieur à 1 km. Une source probable des objets Apollo serait un ensemble de corps sur des orbites peu inclinés entre Mars et Jupiter, à une distance entre 2 et 2.3 UA. On peu alors montrer que l'attraction de Jupiter peut perturber les trajectoires de ces objets et les dévier sur des orbites trés excentriques. On voit donc que les interactions gravitationnelles, dés qu'elles s'éloignent d'un probléme à deux corps deviennent trés complexes, conduisant à des phénoménes imprévisibles. C est ce que l'on appelle des transition chaotiques.
L'influence de Jupiter est trés importante dans la structure des ceintures d'astéroides. En particulier, on observe des lacunes, appellées lacunes de Kirckwood qui apparaissent à des distances pour lesquelles la période des orbites Kepleriennes des astérodes est dans un rapport simple avec la période de Jupiter. Ces lacunes peuvent alors correspondent soient à des dépressions, soit à des concentrations. Par exemple, la lacune de Hilda est telle que le rapport des périodes est de 3/2.

3 L'effet des marées sur les planétes

3.1 La force de Marée et les marées fluides

les forces de marée sont une des premiéres manifestations du fait que les planétes ne sont pas ponctuelles, mais de la taille finie. A l'échelle de la planéte en effet, les forces d'attraction gravitationnelle ne sont pas homogénes. le centre des planétes seront donc attirées par les autres astres différemment que leur bords, induisant une faible déformation de ces planétes.
Pour exprimer la force de marée, considéront une planéte de rayon a, soumise

à l'attraction gravitationel d'un corps de masse m situé à une distance $R = |\mathbf{r}|$ du centre de la planéte. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un point materiel dans le repére lié à la Terre donne

$$m\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{f} + \mathcal{G}m\ M\frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{|R-r|^3} - m\gamma_{inertie} \tag{20}$$

Les forces d'inerties comprennent les forces liées à la rotation de la Terre (accélération centripéte et accélération de Coriolis), mais aussi l'accélération d'entrainement liée à l'attraction de l'astre de masse M sur la Terre. Cette force est donc simplement

$$\gamma_{inertie} = \mathcal{G}M\frac{\mathbf{R}}{|R|^3} \tag{21}$$

On voit qu'il apparait une force qui fait apparaitre la différence d'attraction gravitationnelle entre un point du globe et le cantre de la planéte. Cette accélération s'écrit alors

$$\mathbf{f}_{Maree} = \mathcal{G}\ M[\frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{|R-r|^3} - \frac{\mathbf{R}}{|R|^3}] = -\nabla\phi_{Maree} \tag{22}$$

o ϕ_{Maree} est le potentiel de marée. Ce potentiel est donnée par

$$\phi_{Maree} = -\mathcal{G}\ M[\frac{1}{|R-r|} - \frac{\mathbf{R}.\mathbf{r}}{|R|^3}] \tag{23}$$

Exprimons alors le potentiel de la force d'attraction gravitationnel.

$$V(\mathbf{r}) = -\mathcal{G}\frac{M}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \tag{24}$$

Si la distance R est grande devant r, on peut faire un développement limité du potentiel par rapport aux puissances de $x = r/R$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} &= \frac{1}{R}(1 - 2x\cos\theta + x^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{R}(1 + x\cos\theta \\ &+ x^2(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}) + x^3(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta) + ...)\end{aligned} \tag{25}$$

Si l on dérive ce potentiel, on trouve l'expression des accélérations perturbatrices. soit, en posant $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ et en remarquant que

$$\nabla r\cos\theta = \mathbf{u} \tag{26}$$

$$\nabla r = \mathbf{e}_r \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

on a finalement

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + ... \tag{29}$$

avec

$$\gamma_0 = +\frac{\mathcal{G}M}{R^2}\mathbf{u} \tag{30}$$

$$\gamma_1 = +\frac{\mathcal{G}M}{R^3}(3\ \mathbf{uu.r} - r\mathbf{e}_r) \tag{31}$$

$$\gamma_2 = +\frac{\mathcal{G}M}{R^4}(\frac{15}{2}\mathbf{u}(\mathbf{u.r})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}r^2 - 3r\mathbf{e}_r\mathbf{u.r}) \tag{32}$$

le premier terme correspond à l'accélaration d'attraction excercée au centre de la planéte. Cette accélération est celle qui entraine la planéte le long de sa trajectoire. Si on se place dans un repére lié à la planéte, elle disparaitra, car opposée à l'accélération liée à l'inertie de la planéte. Les accélérations supplémentaires sont les accélérations de la marée. Le potentiel de Marée est, si on se limite au premier terme

$$\phi_{Maree} = -\frac{\mathcal{G}Mr^2}{R^3}(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}) - \frac{\mathcal{G}Mr^3}{R^4}(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta) \tag{33}$$

Dans la plupart des cas, le potentiel de marée peut tre négligé pour ses termes supérieurs. Seul le terme en r^2/R^3 est alors aà considerer. En effet, ceci est tout a fait justifié lorsque l'argument x de la série est petit: c'est le cas pour les marées crées par le soleil sur les planétes ($x = 4$ x 10^{-5} pour la Terre par exemple. Ce terme est souvent petit pour les marées créees par les satellites sur la planéte, mais pas toujours. On a pour la Lune $x = 0.0167$, mais pour la marée de Phobos sur Mars $x = 1/2.76$, $x = 1/13$ pour la marée de Charon sur Pluton. Négliger les termes supérieurs représente alors une erreur de l'ordre du pourcent sur Terre, mais plus importante encore sur Mars. Nous allons maintenant étudier les conséquence de cette force de marée. Pour commencer, considérons une planéte fluide et négligeons la compressibilité. Quelle est la forme de la planéte, lorsqu'elle est soumise aux forces conjuguées de sa pesanteur et de la force de marée?

Pour répondre à cette question, considérons le potentiel de pesanteur de la planéte $W(\mathbf{r})$, à partir duquel dérive la pesanteur par la relation $\mathbf{g} = -\nabla W$. La surface de la planéte est une surface d'équilibre et doit donc tre une surface équipotentielle de la somme des divers champs de potentiels. On obtient donc

$$W_{total}(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \tag{34}$$

Appelons $\mathbf{r}_s$ la position de la surface en l'absence de marée. Considérons que le potentiel de marée U est petit devant le potentiel de la pesanteur, et que la déformation de la surface par la marée est également faible. En différenciant la relation (xx) autour de la position d'équilibre nous déduisons que la surface est une équipotentielle lorsque la quantité:

$$-\delta\mathbf{r}.\mathbf{g}_0(\mathbf{r}_s) + U(\mathbf{r}_s) \tag{35}$$

est constante. La valeur de cette constante peut tre calculée en supposant la planéte incompressible. La variation de volume totale produite par la marée doit tre nulle. Intégrant la relation sur la surface, on déduit alors que cette constante doit tre égal à la valeur moyenne du potentiel perturbateur, ce qui donne finalement:

$$\frac{U(\mathbf{r}_s) - \frac{1}{4\pi}\int d\Sigma\ U(\mathbf{r}_s)}{\mathbf{g}_0(\mathbf{r}_s)} = \delta h \tag{36}$$

ou δh représente la hauteur de la déformation perpendiculaire à la surface non déformée de la planéte (et donc paralélement à son champ de pesanteur) . En remarquant que la valeur moyenne de la perturbation du potentiel de marée est nulle, on en déduit finalement l'expression de la déformation de la surface de la planéte par la force de marée:

$$\delta h = h_0 \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \tag{37}$$

where $h_0 = \frac{\mathcal{G}Ma^2}{g_0 R^3}$.

Sun/Mercury	Sun/Earth	Sun/Mars	Sun/Jupiter	Moon/Earth	Phobos/Mars
1 m	16 cm	2,6 cm	5,7 cm	36 cm	2,4 mm

Table 1: Amplitude of the tidal amplitude

Ces relations donnent l'amplitude des marées sur divers planétes. Mis à part Mercure, les marées terrestres comptent parmi les plus importante dans le systéme solaire, par l'action conjuguée du Soleil et de la Lune. Les relations que nous venons d'obtenir, dans le case de la Terre, sont également valables pour les marées océaniques. Néanmoins pour ces derniéres des phénoménes de resonance peuvent avoir lieu, amplifiant les amplitudes des ondes océaniques.
En fait, il faut en plus considérer dans le cas de la Terre le fait que la Terre est inclinée par rapport au plan de l'écliptique. L'inclinaison est de xx degrés. On doit donc alors écrire le cosinus sous la forme

$$\cos\Theta = \sin\theta\sin\delta + \cos\theta\cos\delta\cos(H-\phi) \tag{38}$$

Si on remplace cette expression dans le potentiel, on trouve alors

$$\begin{aligned}
\frac{3\cos^2\Theta - 1}{2} &= (1 - \frac{3\cos^2\theta}{2})^2(1 - \frac{3\cos^2\theta}{2})^2 && (39)\\
&+ 3\cos\theta\sin\theta\cos\delta\sin\delta\cos(H-\phi) && (40)\\
&+ \frac{3}{4}\cos^2\theta\cos^2\delta\cos 2(H-\phi) && (41)
\end{aligned}$$

Le premier terme s'appéle terme zonal. Il ne dépend pas de la longitude de la lune, mais seulement de l'angle entre le plan équatorial de la Terre et le plan de l'orbite lunaire, c'est à dire la déclinaison de la Lune. Ce terme va varie avec une période deux fois plus faible que la période lunaire, soit environ 13.666 jours (Onde Mf). A cela ce rajoute la variation de la distance Terre-Lune, ce qui fait une période égal à la période lunaire, 27,555 jours (onde Mm). Le second terme fait apparaitre un terme en $\cos(H-\phi)$, qui va faire intervenir la période de rotation de la Terre par rapport à la Lune, soit 24h04. Au voisinage de cette onde, on trouvera une série d'ondes de marée provenant des compositions de cette derniere avec les variations plus lentes de déclinaison et d'ellipticité. Cette onde est l'onde diurne. Enfin, on a enfin le troisiéme terme qui comprend un terme qui varie avec une fréquence deux fois plus grande que la vitesse de rotation angulaire de la Lune, et donc avec une période de 12h25, qui est l'onde semi-diurne...

3.2 les marées solides: Nombres de Love et atténuation des planétes

Nous avons étudié dans le chapitre précédent les marées d'une planéte fluide. En fait la Terre est rigide, et donc l'amplitude réelle de ces marées est plus faible. Une planéte complétement rigide aura par exemple une amplitude liée à la marée complétement nulle. Résoudre le probléme des marée solide est un probleme beaucoup plus complexe.
Considérons une Terre à symétrie sphérique. Le déplacement de la Terre produit par la marée pour une planète fluide incompressible peut s'écrire sous la forme:

$$u(r) = \frac{\mathcal{G}Mr^2}{gR^3}(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2})$$

où θ est l'angle entre le point et la direction de l'astre produisant la marée. Dans une planéte non-fluide, ce déplacement s'exprimera sous la forme

$$u(r) = H(r)\frac{\mathcal{G}Mr^2}{gR^3}(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}) = -H(r)\frac{\phi_{Maree}}{g}$$

A la surface, la grandeur $H(a) = h$ définitun nombre appelé nombre de Love. On peut également définir d'autres nombres de Love. L'un est relié au potentiel d'attraction gravitationnel de la Terre, qui sous l'effet des marées, se retrouve perturbé et devient:

$$\phi_{grav} = \phi_0 + K(r)\phi_{Maree}$$

Le potentiel à la surface de la Terre devient donc

$$\begin{aligned}
\phi_{grav}(a) &= \phi_0(a) + u(a)\frac{d\phi_0}{dr} + K(a)\phi_{Maree} \\
\phi_{grav.}(a) &= \phi_0(a) + (K(a) - H(a))\phi_{Maree}
\end{aligned}$$

ou on utilise $\frac{d\phi_0}{dr} = g$. Le potentiel complet à la surface est donc maintenant

$$\phi_{total}(a) = \phi_0(a) + (1 + K(a) - H(a))\phi_{Maree}$$